



MATERIAL ADICIONAL M2

2025



Contenidos

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO 2

 Medida angular de un arco y teorema del ángulo inscrito 2

 Teoremas de ángulos y arcos..... 4

 Teoremas de ángulo interior, exterior y semi - inscrito 5

 Proporcionalidad en la circunferencia 8

FUNCIÓN EXPONENCIAL..... 10

FUNCIÓN LOGARÍTMICA 12

TRIGONOMETRÍA 14

 Identidades trigonométricas..... 14

 Medida de ángulos usando radianes..... 20

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 22

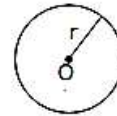
 Función Seno..... 23

 Función Coseno 24

 Función tangente 26

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

CIRCUNFERENCIA: Dado un punto O y una distancia r , se llama **circunferencia** de centro O y radio r al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto O .

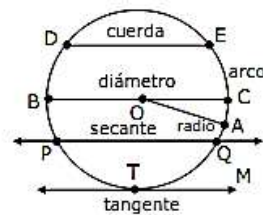


O : Centro
 r : Radio
 $C(O,r) = \odot(O,r)$

RADIO: Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta ($\overline{OA}$).

CUERDA: Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia ($\overline{DE}$).

DIÁMETRO: Cuerda que contiene al centro de la circunferencia ($\overline{BC}$). Es la cuerda de mayor longitud.



SECANTE: Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia ($\overleftrightarrow{PQ}$).

TANGENTE: Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto ($\overleftrightarrow{TM}$). T punto de tangencia.

ARCO: Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella ($\widehat{CE}$).

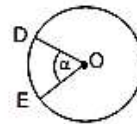
ÁNGULO DEL CENTRO: Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus rayos son radios de la misma ($\angle EOD$).

Medida angular de un arco y teorema del ángulo inscrito

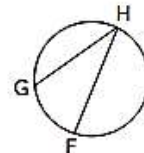
MEDIDA ANGULAR DE UN ARCO

En toda circunferencia la medida angular de un arco es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco.

$$\widehat{DE} = \angle EOD = \alpha$$



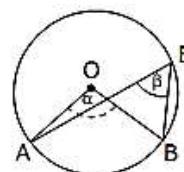
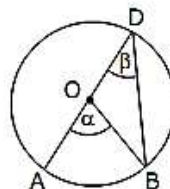
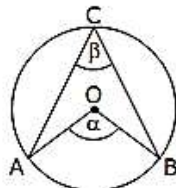
ÁNGULO INSCRITO: Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta ($\angle FHG$).



TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del arco que subtiende el mismo arco.

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$



O: centro de la circunferencia

- En la circunferencia de centro O (fig. 1), se cumple que $\widehat{BA} \cong \widehat{DC}$ y $\widehat{AED} + \widehat{CB} = 3\widehat{BA}$. Entonces, la medida del $\angle x$ es

- 45°
- 60°
- 72°
- 84°
- 90°

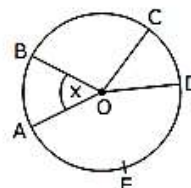


fig. 1

- $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son diámetros de la circunferencia de centro O (fig. 2). Si $\angle BOA = 2\angle COB$, entonces el $\angle CDB$ mide

- 30°
- 35°
- 45°
- 60°
- 120°

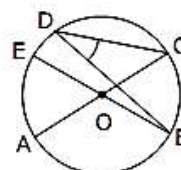
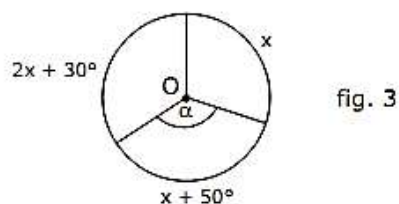


fig. 2

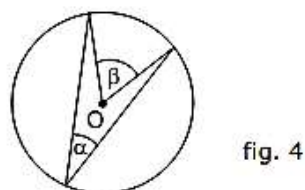
3. Según los datos entregados en la circunferencia de centro O de la figura 3, ¿cuánto mide el ángulo α ?

- A) 35°
B) 40°
C) 70°
D) 120°
E) 150°



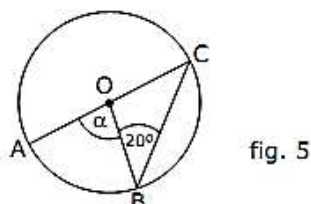
4. En la circunferencia de centro O de la figura 4, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Entonces, la medida de β es

- A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 75°



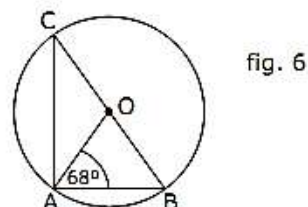
5. En la circunferencia de centro O (fig. 5), $\overline{AC}$ es diámetro. Entonces, la medida de α es

- A) 10°
B) 20°
C) 40°
D) 80°
E) 140°



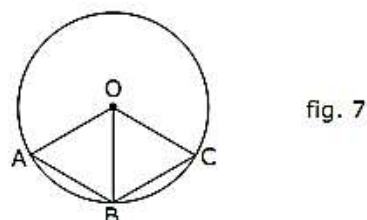
6. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{BC}$ de la figura 6, ¿cuánto mide el $\angle BCA$?

- A) 22°
B) 34°
C) 36°
D) 44°
E) 68°



7. En la circunferencia de centro O de la figura 7, $\angle BOA = 70^\circ$ y $\angle COB = 40^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

- A) 140°
B) 125°
C) 120°
D) 110°
E) 95°

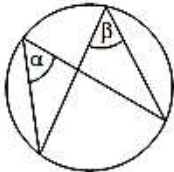


Teoremas de ángulos y arcos

TEOREMA

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtenden un mismo arco tienen igual medida.

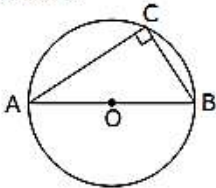
$$\alpha = \beta$$



TEOREMA

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$$\angle BCA = 90^\circ$$

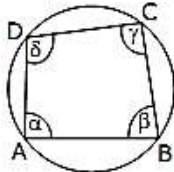


O: centro de la circunferencia

TEOREMA

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

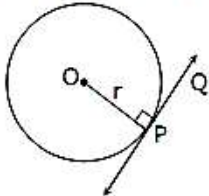
$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \delta &= 180^\circ \end{aligned}$$



TEOREMA

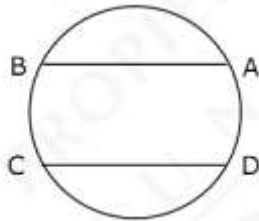
La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}$$



TEOREMA

Dos cuerdas paralelas determinan arcos congruentes. (Arco DA = Arco BC)



1. En la figura 1, $\angle TPQ = 140^\circ$ y $\angle QRP = 15^\circ$. ¿Cuánto mide el $\angle PQT$?

- A) 15°
- B) 20°
- C) 25°
- D) 30°
- E) 35°

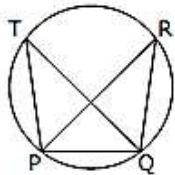


fig. 1

2. Si en la circunferencia de la figura 2, $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 90^\circ$, entonces la medida de β es

- A) 15°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 90°

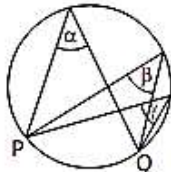


fig. 2

3. En la figura 3, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Entonces, $\angle x =$

- A) 30°
 B) 65°
 C) 115°
 D) 130°
 E) no se puede determinar su medida.

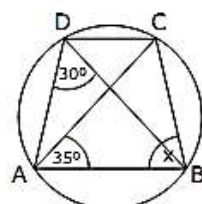


fig. 3

4. En la figura 4, $\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia de centro O. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

- A) 15°
 B) 25°
 C) 35°
 D) 55°
 E) 70°

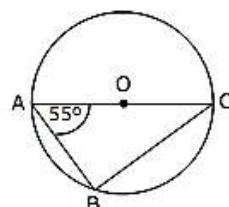


fig. 4

5. En la figura 5, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O, en T. ¿Cuánto mide el $\angle OPT$?

- A) 10°
 B) 20°
 C) 30°
 D) 40°
 E) 50°

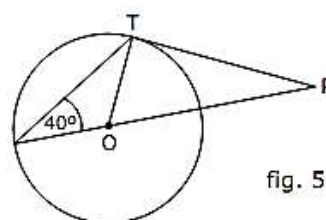


fig. 5

Teoremas de ángulo interior, exterior y semi - inscrito

ÁNGULO INTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo interior de la circunferencia es aquel que se forma al cortarse internamente dos cuerdas, como se muestra en la figura 1, y su medida corresponde a la semisuma de los arcos que subtiende.

$$\alpha = \frac{\widehat{BA} + \widehat{CD}}{2}$$

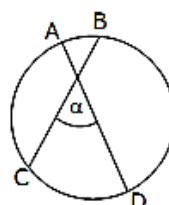


fig. 1

ÁNGULO EXTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo exterior es aquel que tiene su vértice en un punto exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus rayos, tangentes o secantes a la misma, como se muestra en la figura 2, y su medida corresponde a la semidiferencia de los arcos que subtiende.

$$\beta = \frac{\widehat{DC} - \widehat{AB}}{2}$$

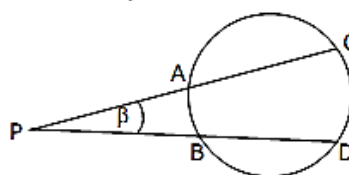
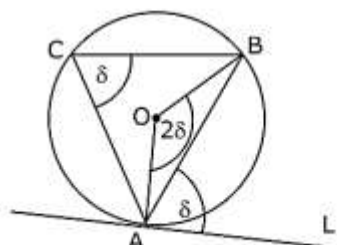


fig. 2

ÁNGULO SEMI INSCRITO

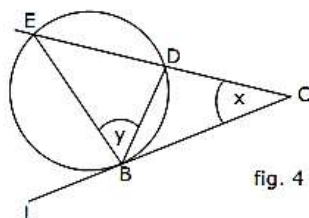
El ángulo semi-inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia, sus rayos lo forman una cuerda AB y una recta L tangente en A, su medida corresponde a la mitad del arco que subtiende y al ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.

$$\begin{aligned} \angle LAB &= \frac{\text{arco AB}}{2} \\ \angle LAB &= \frac{\angle AOB}{2} \\ \angle LAB &= \angle ACB \end{aligned}$$



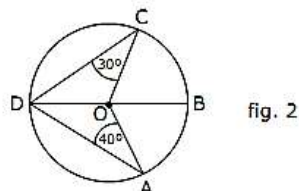
1. En la circunferencia de la figura 4, la recta L es tangente en B, el ángulo DBC mide 50° y $\widehat{EB} = 140^\circ$, entonces el valor de $x + y$ es

- A) 70°
B) 80°
C) 90°
D) 100°
E) 120°



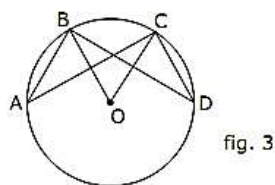
2. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{DB}$ de la figura 2, ¿cuánto mide el ángulo COA?

- A) 70°
B) 100°
C) 120°
D) 140°
E) 160°



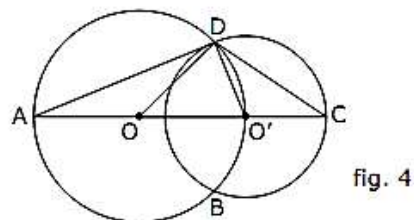
3. En la circunferencia de centro O de la figura 3, $\angle BAC + \angle BDC = 80^\circ$. Entonces, el $\angle BOC$ mide

- A) falta información.
B) 80°
C) 60°
D) 40°
E) 20°



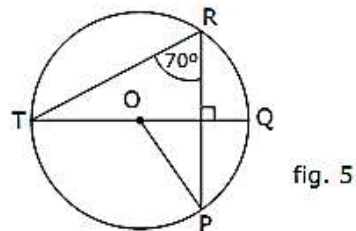
4. O y O' son los centros de las circunferencias de la figura 4. Si $\angle DAC = 40^\circ$, ¿cuánto mide el ángulo ACD?

- A) 10°
B) 20°
C) 25°
D) 40°
E) 50°



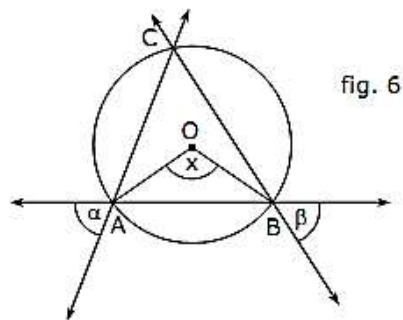
5. En la circunferencia de centro O de la figura 5, ¿cuánto mide el ángulo OPR?

- A) 35°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 70°



6. En la circunferencia de centro O de la figura 6, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ son secantes. Si $\alpha = 80^\circ$ y $\beta = 50^\circ$, entonces el ángulo x es igual a

- A) 65°
B) 75°
C) 90°
D) 100°
E) 130°



7. En la figura 7, O es el centro de la circunferencia. Si $\angle ORQ = 36^\circ$ y $\angle ROP = 54^\circ$, ¿cuánto mide el $\angle RTP$?

- A) 63°
- B) 72°
- C) 108°
- D) 117°
- E) 144°

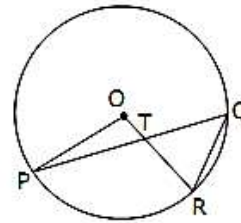


fig. 7

8. En la circunferencia de la figura 8, el ángulo ACD mide 10° y el arco BC mide 100° , la medida del ángulo x es

- A) 45°
- B) 55°
- C) 60°
- D) 65°
- E) 100°

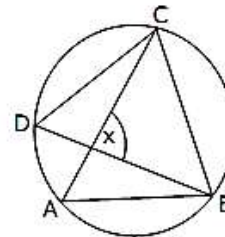
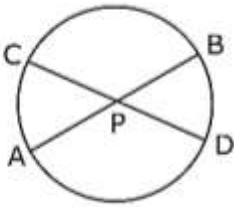


fig. 8

Proporcionalidad en la circunferencia

Teorema de las cuerdas

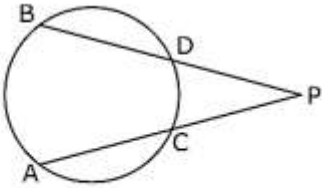
Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en el interior de ella, el producto de los segmentos determinados en una de ellas, es igual al producto de segmentos determinados en la otra.



$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

Teorema de las secantes

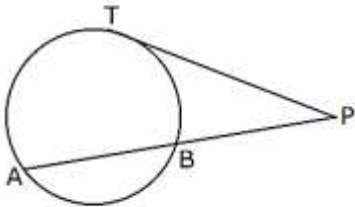
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.



$$\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$$

Teorema de la tangente y la secante

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente al cuadrado, es igual al producto entre la secante y su segmento exterior.



$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

1. En la circunferencia de la figura adjunta, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se intersectan en P. Si $AP = 9\text{ cm}$, $PB = 12\text{ cm}$ y $CP = 18\text{ cm}$, entonces $\overline{CD}$ mide

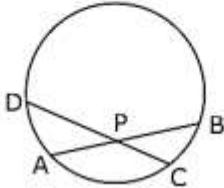
A) 24 cm

B) 21 cm

C) 13,5 cm

D) 6 cm

E) 3 cm



2. En la figura adjunta, $\overline{PS}$ y $\overline{PU}$ son secantes a la circunferencia de centro O. Si $PR = RS = 14$ y $PT = 8$, entonces $\overline{TU}$ es igual a

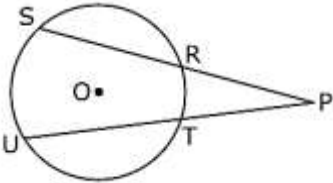
A) 8

B) 16,5

C) 24,5

D) 41

E) 49



3. En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, $\overline{AB}$ es tangente y $\overline{AC}$ secante. Entonces, según los datos proporcionados en la figura, ¿cuál es la longitud de DC?

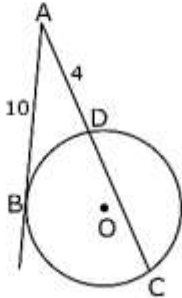
A) 18

B) 21

C) 25

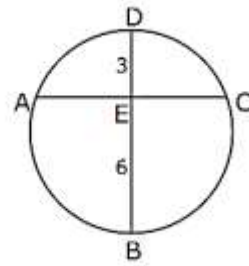
D) 29

E) 30



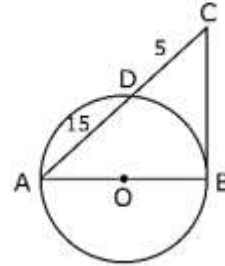
4. En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas. Si $AE = EC$, entonces la cuerda AC mide

- A) 36
B) 18
C) 9
D) $6\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{2}$



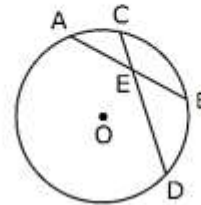
5. En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, $\overline{BC}$ es tangente y $\overline{AC}$ es secante. ¿Cuál es la medida de BC ?

- A) $10\sqrt{3}$
B) $10\sqrt{2}$
C) $5\sqrt{3}$
D) 10
E) 13



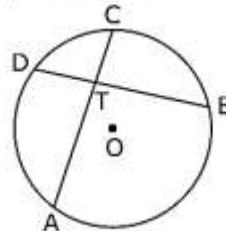
6. En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se intersectan en E . Si $\overline{AE} \cong \overline{EB}$, $CE = 4$ cm y $ED = 9$ cm, entonces la medida de AB es

- A) 6 cm
B) 9 cm
C) 12 cm
D) 24 cm
E) 36 cm



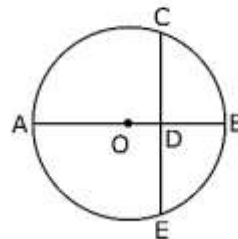
7. En la circunferencia de centro O de la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas que se cortan en T . Si $CT : TA = 3 : 5$, $DT = 5$ cm y $TB = 12$ cm, entonces AC mide

- A) 2 cm
B) 6 cm
C) 10 cm
D) 16 cm
E) 17 cm



8. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ de la figura adjunta, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$. Si $CD = 8$ cm y $DB = 4$ cm, ¿cuánto mide el perímetro de la circunferencia?

- A) 16π cm
B) 20π cm
C) 32π cm
D) 80π cm
E) 100π cm



FUNCIÓN EXPONENCIAL

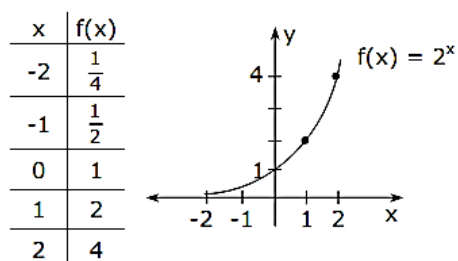
La función f definida por $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$ se denomina **función exponencial**.

Propiedades

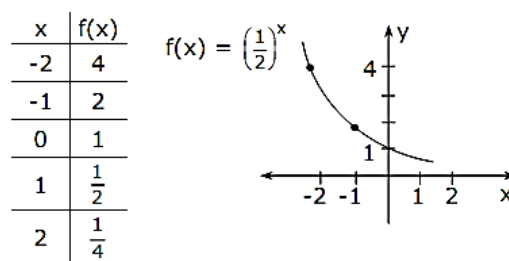
- * El Dominio es: $D_f = \mathbb{R}$
- * El Recorrido es: $R_f = \mathbb{R}^+$
- * La gráfica intercepta al eje de las ordenadas en el punto $(0, 1)$.
- * Si $a > 1$, entonces $f(x) = a^x$ es creciente.
- * Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente.
- * La gráfica no corta al eje de las abscisas.

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1) $f(x) = 2^x$



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



1. Con respecto a la función $f(x) = 5^x$, ¿cuál de las siguientes opciones es **falsa**?
 - A) La función $f(x)$ es creciente
 - B) $f(2) = 25$
 - C) La gráfica no interseca al eje de las abscisas
 - D) La gráfica interseca al eje de las ordenadas en el punto $(1, 0)$
 - E) $f(-2) < f(2)$

2. Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s)?
 - I) La función $f(x)$ es decreciente.
 - II) $f(-2) = 16$
 - III) $f(-1) > f(1)$
 - A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III

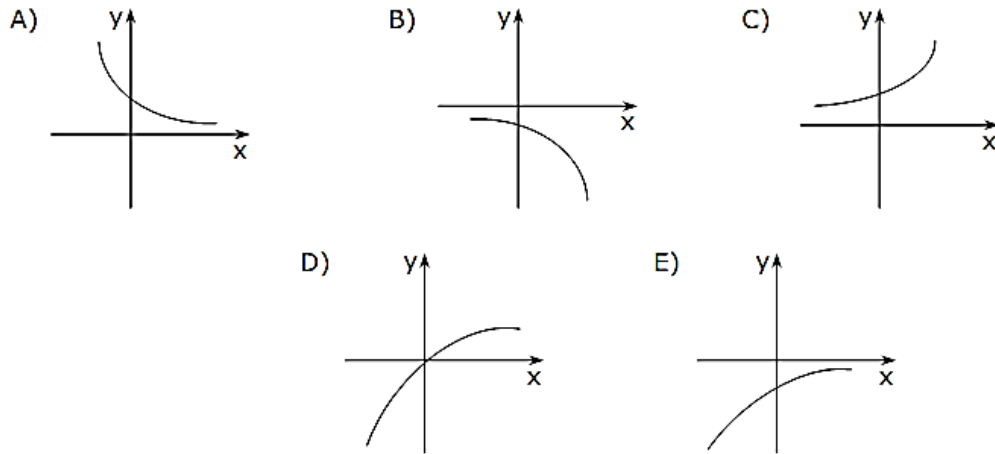
3. Dada la función $f(x) = 1^x$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?
 - I) La función $f(x)$ es una función constante.
 - II) Su dominio son los reales.
 - III) Su recorrido está dado por $\{1\}$.
 - A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo II y III
 - E) I, II y III

4. En la función exponencial $f(x) = ka^x$, si $f(0) = 2$ y $f(2) = 50$, ¿cuál es el valor de la constante k y de la base a , respectivamente?
 - A) $-\sqrt{2}$ y -5
 - B) 2 y -5
 - C) -2 y 5
 - D) $\sqrt{2}$ y -5
 - E) 2 y 5

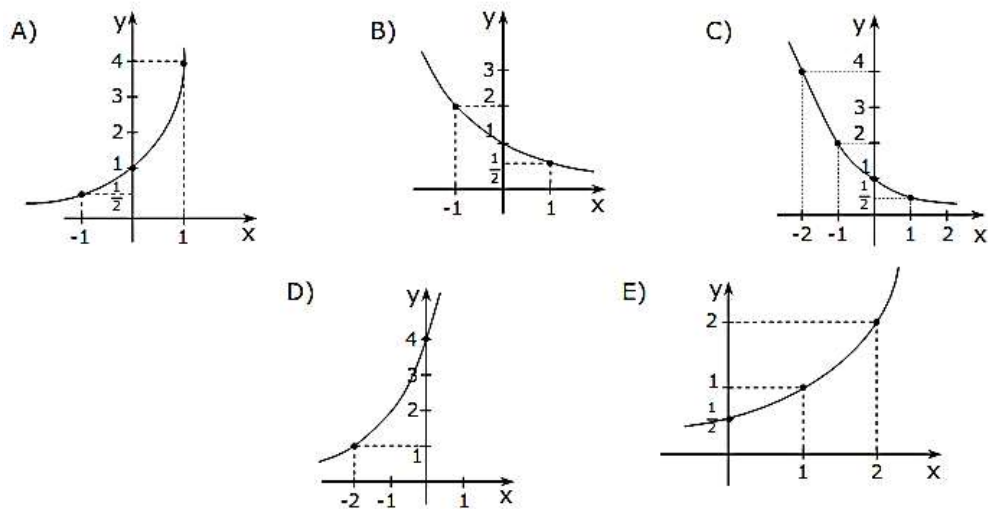
5. Para que la función $f(x) = a^{kx}$, sea decreciente se debe cumplir que

- A) $0 < a < 1$ y $k < 0$
- B) $a > 1$ y $k > 0$
- C) $a > 1$ y $k < 0$
- D) $a > 1$ y $k < 1$
- E) ninguna de las alternativas anteriores.

6. La gráfica de la función $y = -5^x$ está mejor representada en la opción



7. El gráfico de la función $f(x) = 2^{x-1}$ está representado por la alternativa



8. Un microorganismo se duplica cada 15 minutos. Si una muestra de laboratorio existía un microorganismo a las 09:00 A.M, ¿cuántos microorganismos habrá en esa misma muestra a las 4:00 P.M?

- A) 2^{28}
- B) 2^{24}
- C) 2^{20}
- D) 2^{14}
- E) 2^7

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una función **f** definida por
denomina

$$f(x) = \log_a x, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1 \text{ y } x > 0$$

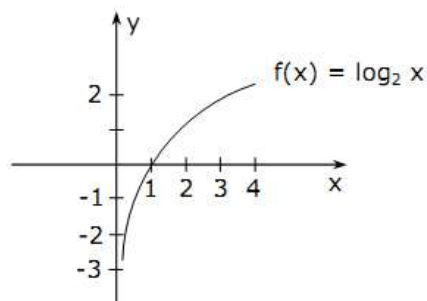
se

función logarítmica.

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

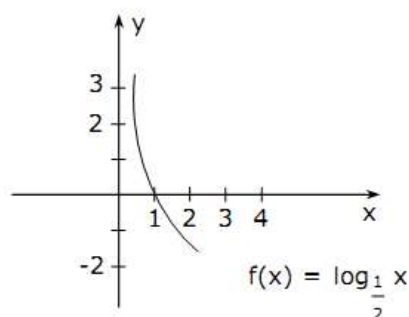
i) $f(x) = \log_2 x$ con $a = 2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



ii) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ con $a = \frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3



OBSERVACIONES

- * El dominio es: $D_f = \mathbb{R}^+$
- * El recorrido es: $R_f = \mathbb{R}$
- * La gráfica interseca al eje x en el punto (1, 0).
- * Si $a > 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es creciente.
- * Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es decreciente.
- * La curva no interseca al eje y.

1. La gráfica de $f(x) = \log x - 1$ pasa por el punto

- A) (1, 0)
- B) (1, 1)
- C) (1, -1)
- D) (2, 0)
- E) (0, 0)

2. Dada la función $f(x) = \log_2 \left(\frac{3}{2}x - 2 \right)$, ¿cuál es la pre imagen de 4?

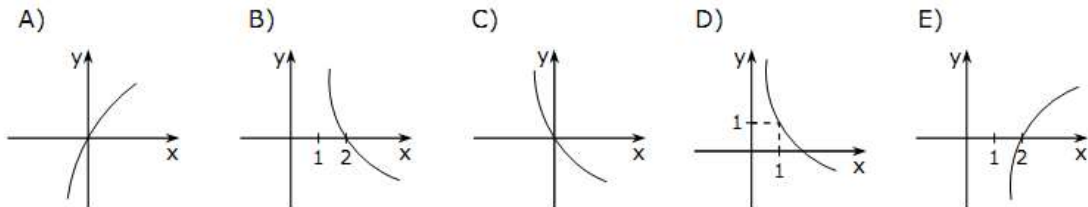
- A) 12
- B) $\frac{34}{3}$
- C) $\frac{28}{3}$
- D) $\frac{20}{3}$
- E) 2

3. Dada la función $g(x) = \log_{\frac{1}{5}}(4x + 1)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $g(6) = -2$
- II) pasa por el origen.
- III) g es decreciente.

- A) Sólo I
- B) Sólo I y II
- C) Sólo I y III
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

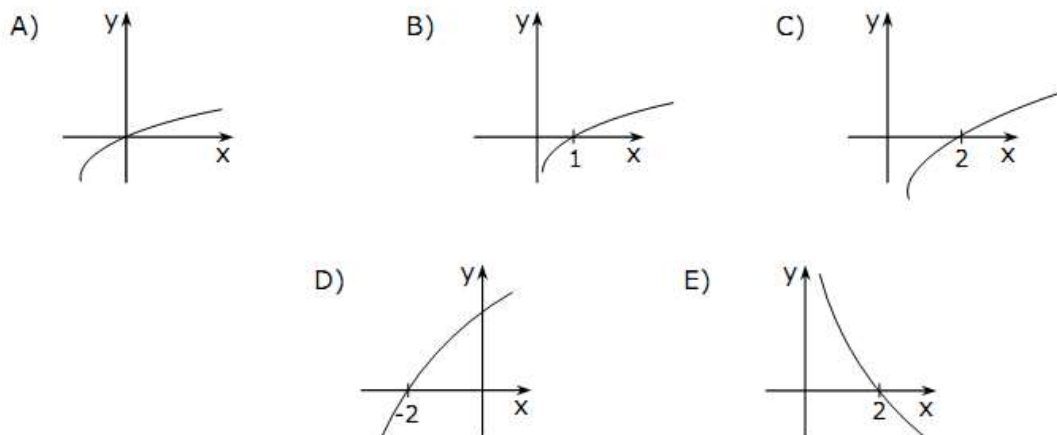
4. El gráfico que mejor representa a la función $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$ es



5. Si $g(x) = \log x$, entonces $\frac{g(a) - g(b)}{g(\sqrt{a}) + g(\sqrt{b})} =$

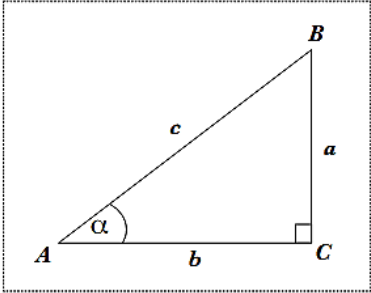
- A) $\frac{\log(a - b)}{\log(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$
- B) $\log(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
- C) $\log(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
- D) $\log \sqrt{a} - \log \sqrt{b}$
- E) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b}\right)$

6. Dada la función $f(x) = \log_2(x - 1)$, su representación gráfica es



TRIGONOMETRÍA

$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$
$\text{sec } \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$



La razón recíproca del **seno** es la **cosecante**, es decir: $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$

La razón recíproca del **coseno** es la **secante**, es decir: $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$

La razón recíproca de la **tangente** es la **cotangente**, es decir: $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$

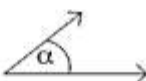
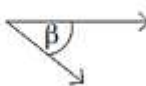
Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre razones trigonométricas que se verifica para cualquier medida del ángulo. Las identidades más utilizadas son las siguientes:

- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$
- $\text{ctg } \alpha = \frac{\text{cosec } \alpha}{\text{sec } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$
- $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$
- $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$
- $1 + \text{ctg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha$

Ángulos de elevación y de depresión

Si consideramos un observador en un punto *A* y un objeto *P* situado en el mismo plano que *A*, podemos definir el ángulo de elevación y de depresión de *A* respecto a *P* de la siguiente forma:

- Ángulo de elevación  Horizontal del observador
- Ángulo de depresión  Horizontal del observador

Valores de las funciones trigonométricas para ángulos más utilizados

α \ Función	seno α	coseno α	tangente α
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	indefinido
180°	0	-1	0
270°	-1	0	indefinido
360°	0	1	0

EJERCICIOS

1. Si $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, entonces $\operatorname{ctg} \alpha$ es

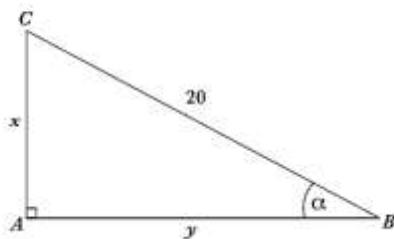
- A) $\frac{5}{13}$
- B) $\frac{5}{12}$
- C) $\frac{12}{13}$
- D) $\frac{13}{12}$
- E) $\frac{13}{5}$

2. Si $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \beta} \text{ es}$$

- A) 1
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) $\frac{1}{16}$

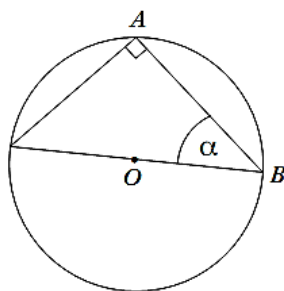
3. El perímetro del $\triangle ABC$ de la figura mide 48 m.
Si $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$, ¿cuánto mide x ?



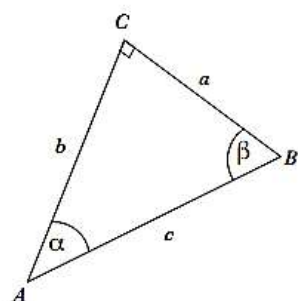
- A) 5 m
- B) 6 m
- C) 12 m
- D) 15 m
- E) Faltan datos para determinarlo.

4. La circunferencia de centro O de la figura tiene radio 6,5 cm. Si $AB = 5$, entonces $\cos \alpha$ es igual a

- A) $\frac{10}{13}$
- B) $\frac{13}{5}$
- C) $\frac{5}{13}$
- D) $\frac{12}{5}$
- E) $\frac{7}{13}$



5. Según la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

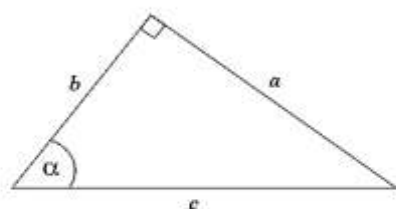


- I) $\text{sen } \alpha = \cos \beta$
 II) $\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta = 1$
 III) $\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$
- A) Sólo I y II
 B) Sólo I y III
 C) Sólo II y III
 D) I, II y III
 E) Ninguna de ellas.
6. Si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ y $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$, entonces $\text{sen}(2\alpha)$ es igual a

- A) $\frac{24}{25}$
 B) $\frac{18}{25}$
 C) $\frac{3}{5}$
 D) $\frac{12}{25}$
 E) $\frac{9}{25}$

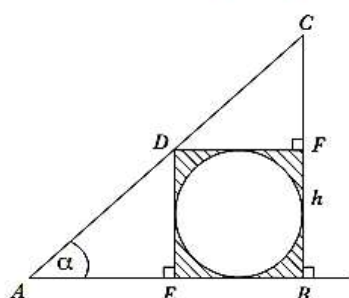
7. Al reducir la expresión $\sqrt[3]{\frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \alpha \cdot \sec \alpha}{\cos \alpha \cdot \text{cosec } \alpha}}$ se obtiene
- A) $\text{tg } \alpha$
 B) $\text{ctg } \alpha$
 C) $\text{sen } \alpha$
 D) $\cos \alpha$
 E) $\sec \alpha$

8. Si en el triángulo de la figura $c = 4 \text{ cm}$, $b = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ y $a = 2 \text{ cm}$, la medida de α es

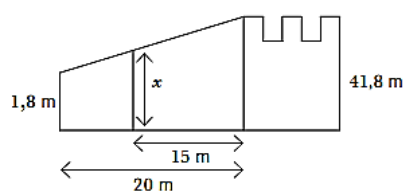


- A) 30°
 B) 45°
 C) 60°
 D) 75°
 E) 90°

9. En la figura, $BFDE$ cuadrado, $CB = 10$ cm, con $\alpha = 30^\circ$, el área achurada mide



- A) $(15 + 5\sqrt{3}) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2$
 B) $(15 + 5\sqrt{3})^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$
 C) $(15 - 5\sqrt{3}) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$
 D) $(15 - 5\sqrt{3})^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2$
 E) $(15 - 5\sqrt{3})^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$
10. La altura del muro para que una persona de 1,8 m no alcance a ver la torre en la posición indicada es

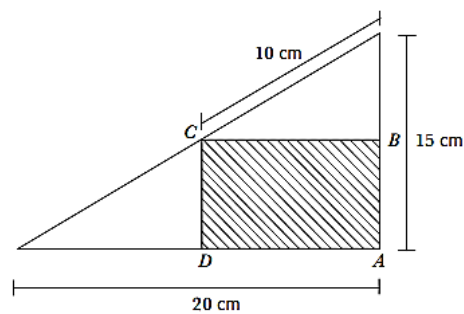


- A) 4,6 m
 B) 9,8 m
 C) 11,8 m
 D) 12,2 m
 E) 15 m
11. En un bote, los ángulos de elevación hacia los puntos más bajo y más alto del asta de una bandera de 9 metros de altura situada sobre un acantilado, son de 30° y 60° , respectivamente. La altura del acantilado es

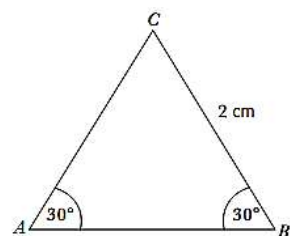
- A) $9\sqrt{3}$ metros
 B) 9 metros
 C) 6 metros
 D) 4,5 metros
 E) 3 metros
12. La longitud entre un papel que se encuentra en el suelo y la punta de un poste es de 9 metros, con un ángulo de elevación de 30° . La distancia del papel a la base del poste es

- A) $3\sqrt{3}$ m
 B) $4,5\sqrt{3}$ m
 C) $6\sqrt{3}$ m
 D) $9\sqrt{3}$ m
 E) 27 m

13. En la figura, el área del rectángulo $ABCD$ mide



- A) 35 cm^2
 - B) 50 cm^2
 - C) 65 cm^2
 - D) 72 cm^2
 - E) 85 cm^2
14. Sea el triángulo ABC de la figura, ¿cuánto mide el lado $\overline{AB}$?



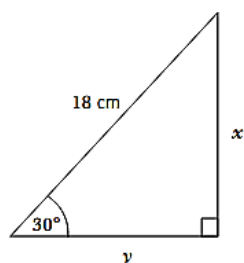
- A) $3\sqrt{2}\text{ cm}$
 - B) 4 cm
 - C) $2\sqrt{3}\text{ cm}$
 - D) $4\sqrt{3}\text{ cm}$
 - E) $2\sqrt{5}\text{ cm}$
15. De las siguientes aseveraciones, la correcta es
- A) $\text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{cos } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha = 1$
 - B) $\text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha}$
 - C) $\text{tg } \alpha - \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha}$
 - D) $\text{tg } \beta + \text{cotg } \beta = \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \beta$
 - E) $\frac{1}{\text{cos}^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x} = 1$
16. Si $\text{cos } \alpha = w$ se puede afirmar que

- I) $\text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha = 1$
- II) $\text{sen}^2 \alpha = 1 - w^2$
- III) $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{w}$

Es(son) verdadera(s)

- A) sólo I y II.
- B) sólo I y III.
- C) sólo II y III.
- D) I, II y III.
- E) ninguna de ellas.

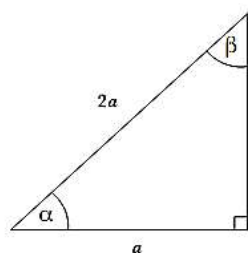
17. En la figura, $(x + 2y)$ es igual a



- A) $(18 + 36\sqrt{3})$ cm
- B) $(18 + 18\sqrt{3})$ cm
- C) $(9 + 18\sqrt{3})$ cm
- D) $(18 + 9\sqrt{3})$ cm
- E) faltan datos para determinarlo.

18. El valor de $2 \sin \alpha - 3 \operatorname{tg} \beta$ es

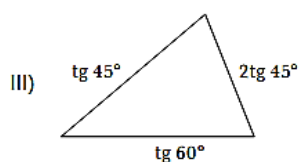
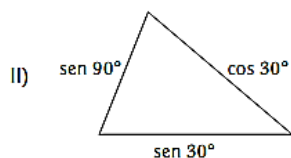
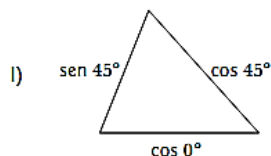
- A) $2\sqrt{3}$
- B) $\frac{11}{6}$
- C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- D) $\frac{9}{2}$
- E) 0



19. El valor de $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$ es

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 1
- D) $\frac{3}{2}$
- E) 2

20. ¿Cuál(es) de los siguientes triángulos es(son) rectángulo(s)?

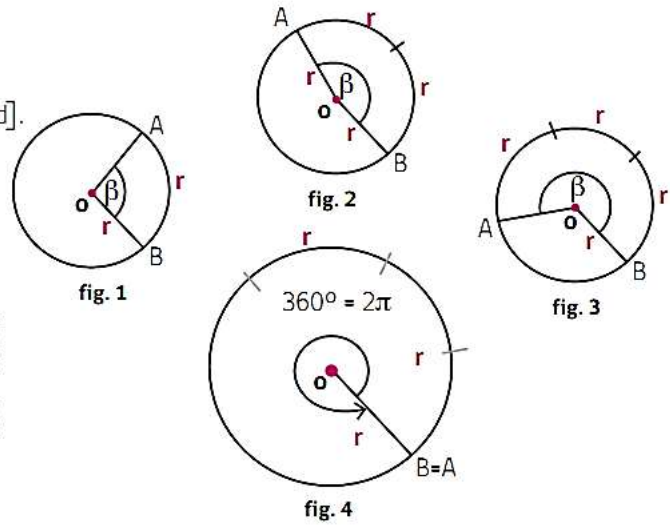


- A) Sólo I y II
- B) Sólo I y III
- C) Sólo II y III
- D) I, II y III
- E) Ninguna de ellas.

Medida de ángulos usando radianes

- Figura 1: el ángulo β mide 1 [rad].
- Figura 2: el ángulo β mide 2 [rad].
- Figura 3: el ángulo β mide 3 [rad].
- Figura 4: el ángulo β = 360° mide 2π [rad].

Obsérvese que en el caso de la figura 4, un ángulo de 360° subtiende un arco de circunferencia completo de medida 2πr unidades, al dividir esta longitud por la medida r del radio, se obtiene 2π, es decir 360° ↔ 2π [rad]. Esta equivalencia permite establecer que 180° ↔ π [rad]



La equivalencia 360° ↔ 2π [rad], permite establecer esta otra equivalencia aun más sencilla 180° ↔ π [rad]. Para transformar ángulos sexagesimales a ángulos radianes y viceversa, se puede usar la siguiente proporción:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \alpha}{\text{medida en grados de } \alpha} = \frac{\pi \text{ [rad]}}{180^\circ}$$

a) Transformar 60° a [rad]: (α=60°)

$$\frac{\text{medida en radianes de } \alpha}{60^\circ} = \frac{\pi \text{ [rad]}}{180^\circ} \rightarrow \text{medida en radianes de } \alpha = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

Por lo tanto 60° = $\frac{\pi}{3}$

b) Transformar $\frac{\pi}{9}$ [rad] a grados: (α= $\frac{\pi}{9}$ [rad])

$$\frac{\pi / 9}{\text{medida en grados de } \alpha} = \frac{\pi \text{ [rad]}}{180^\circ} \rightarrow \text{medida en grados de } \alpha = \frac{\frac{\pi}{9} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

Por lo tanto $\frac{\pi}{9} = 20^\circ$

Completa las siguientes tablas

ÁNGULOS SEXAGESIMALES	ÁNGULOS RADIANES
30°	
	$\frac{\pi}{2}$ [rad]
60°	
	$\frac{\pi}{4}$ [rad]

Medida del ángulo sistema sexagesimal	Medida del ángulo en radianes
$\alpha = 30^\circ$	
$\beta = 45^\circ$	
$\gamma = 60^\circ$	
$\delta = 210^\circ$	
$\varepsilon = 270^\circ$	
$\theta = 315^\circ$	

Medida del ángulo sistema sexagesimal	Medida del ángulo en radianes
$\alpha = \frac{\pi}{8}$ [rad]	
$\gamma = \frac{\pi}{5}$ [rad]	
$\beta = \frac{\pi}{4}$ [rad]	
$\delta = \frac{3 \pi}{5}$ [rad]	
$\varepsilon = \frac{3 \pi}{4}$ [rad]	
$\eta = \frac{7 \pi}{6}$ [rad]	
$\theta = \frac{7 \pi}{4}$ [rad]	
$\varphi = \frac{9 \pi}{4}$ [rad]	

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Funciones seno y coseno

En este módulo nos ocuparemos, en primer lugar, de las funciones trigonométricas.



Son funciones donde la variable independiente θ se refiere a la medida de un ángulo θ (medido en radianes); y donde los valores de las funciones, $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ se calculen con las relaciones trigonométricas usuales.

La primera observación que hacemos en el estudio de las funciones trigonométricas se refiere a que son funciones cuyos valores se **repiten** cada cierto intervalo de la variable independiente. En el caso particular de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ los valores se repiten cada 2π .

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta)$$

$$\text{cos}(\theta + 2\pi) = \text{cos}(\theta)$$

Los valores de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ están determinados por las coordenadas del punto sobre la **circunferencia unidad** (la circunferencia de radio 1 centrada en el origen) como se muestra en la Figura 1.1.

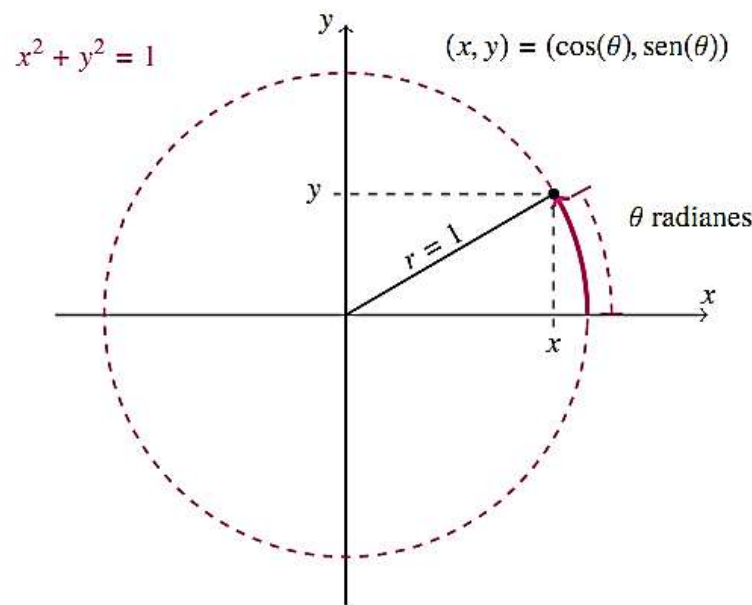


Figura 1.1: Circunferencia unidad.

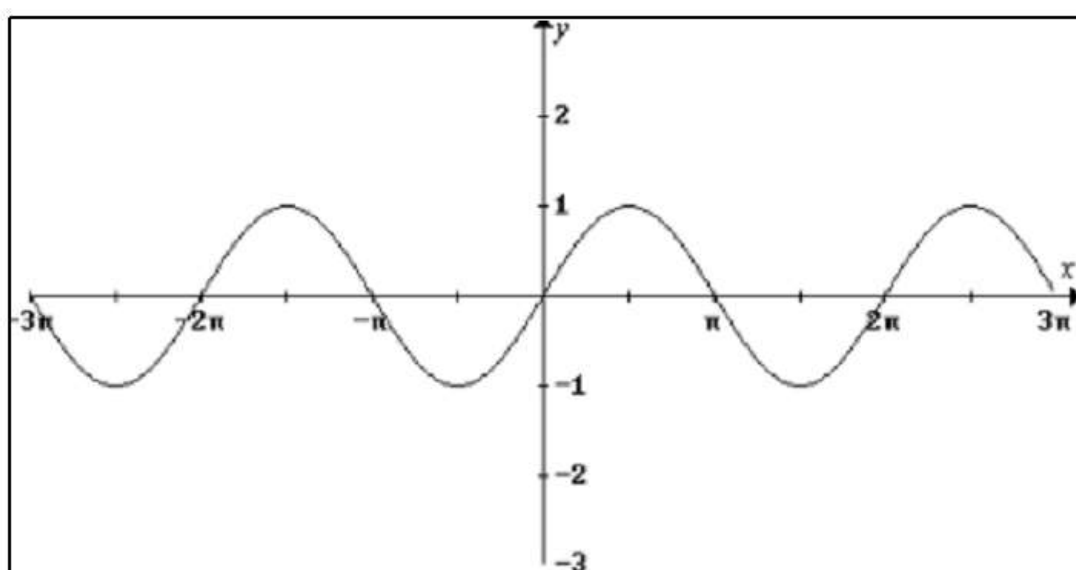
Las coordenadas del punto determinan los valores de las funciones trigonométricas.

Función Seno

La función *seno* es la función definida por: $f(x) = \text{sen } x$.

Características de la función seno

1. Dominio: $\mathbb{R}$
Recorrido: $[-1, 1]$
2. El **período** de la función seno es 2π .
3. La función $y = \text{sen } x$ es **impar**, ya que $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, para todo x en $\mathbb{R}$.
4. La gráfica de $y = \text{sen } x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = n\pi$, para todo número entero n .
5. El valor máximo de $\text{sen } x$ es 1, y el mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función $y = \text{sen } x$ es 1.



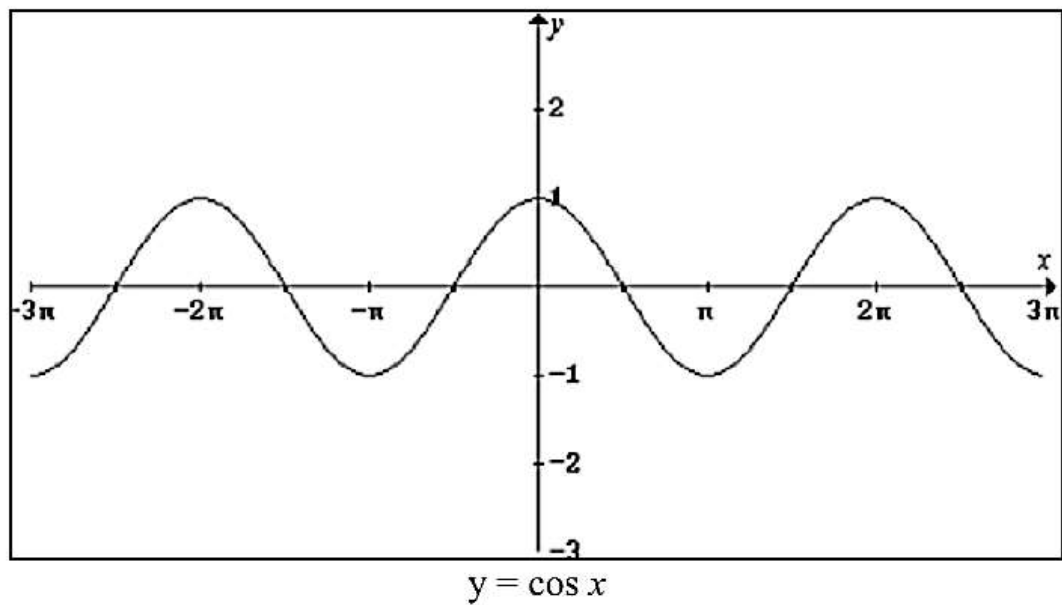
$$y = \text{sen } x$$

Función Coseno

La función *coseno* es la función definida por: $f(x)=\cos x$.

Características de la función *coseno*

- 1. Dominio: IR
Recorrido: $[-1, 1]$
- 2. Es una función periódica, y su **período** es 2π .
- 3. La función $y=\cos x$ es **par**, ya que $\cos(-x)=\cos x$, para todo x en IR .
- 4. La gráfica de $y=\cos x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, para todo número entero n .
- 5. El valor máximo de $\cos x$ es 1, y el valor mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función $y=\cos x$ es 1.

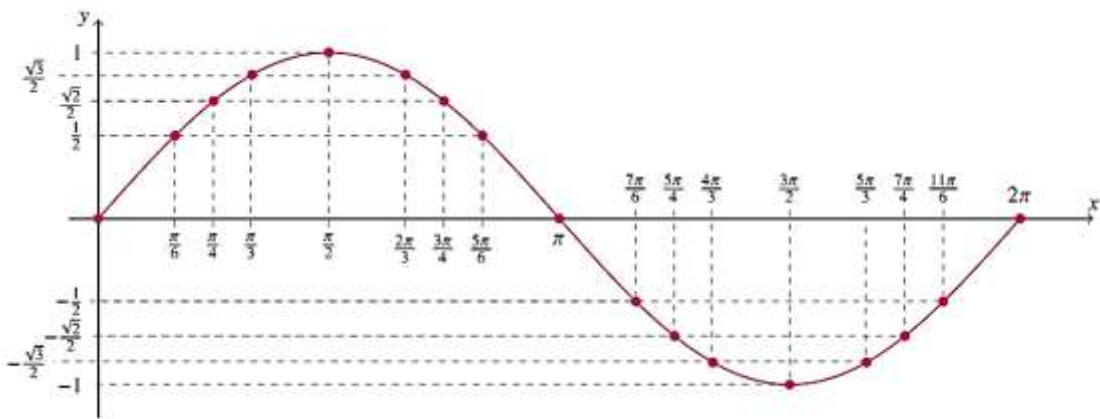


Actividad 1.1 Completen la Tabla 1.1 con los valores de las funciones trigonométricas $\text{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ en los ángulos más usuales comprendidos entre 0 y 2π . ■

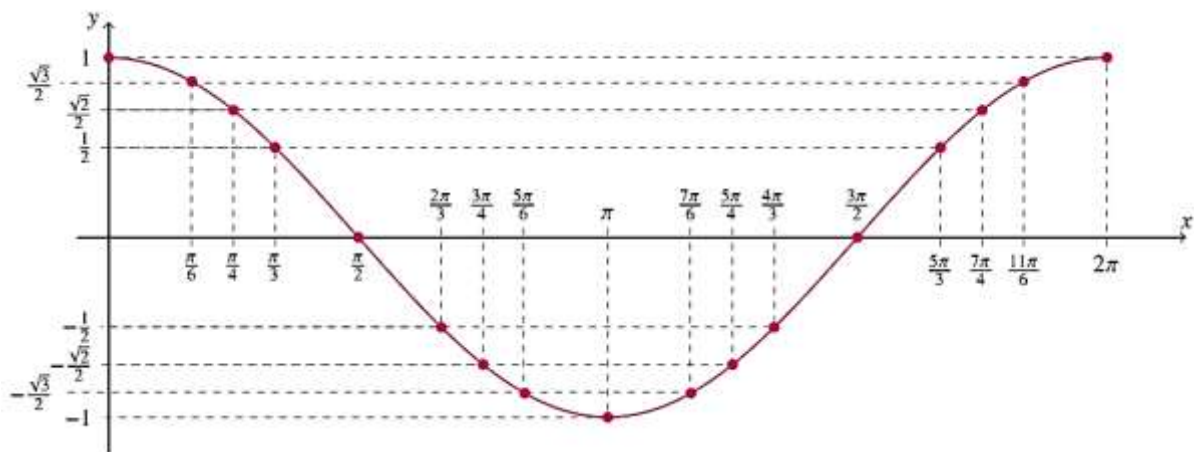
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\text{sen}(\theta)$																	
$\cos(\theta)$																	

Actividad 1.2 Utilicen las gráficas de las Figuras 1.2 y 1.3 para corroborar los valores calculados de la Tabla 1.1. ■

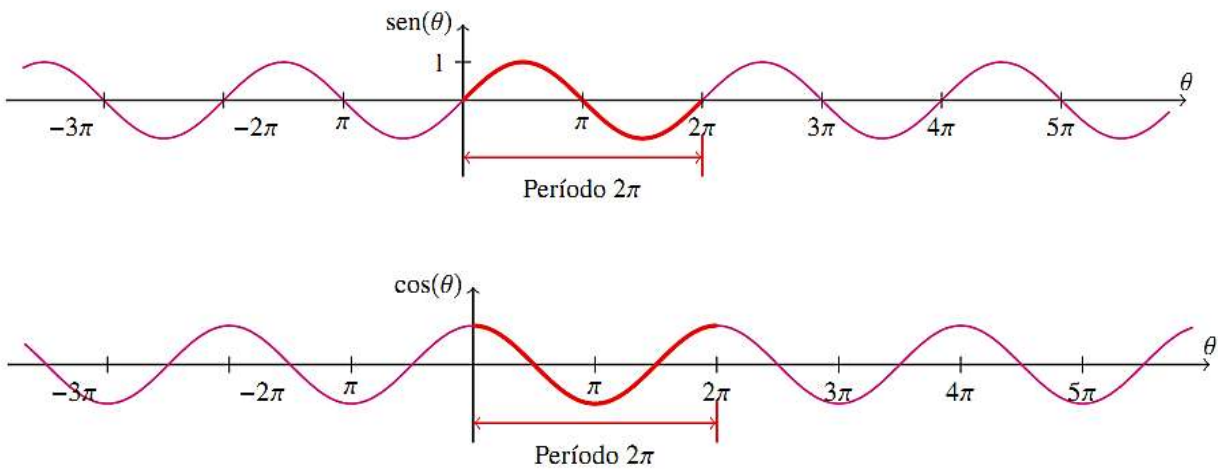
Gráfica de la función $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.



Gráfica de la función $\text{cos}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.



Al considerar la **periodicidad** de las funciones trigonométricas, la gráfica que tenemos en el intervalo $[0, 2\pi]$ se copia en los intervalos (de longitud 2π) siguientes y anteriores para ocupar todo el eje horizontal como se ve en las Figuras 1.4 y 1.5.



Función tangente

La función *tangente* es la función definida por: $f(x) = \tan x$.

Características de la función tangente

1. Dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi / n \in \mathbb{Z} \right\}$
Recorrido: $\mathbb{R}$
2. La función tangente es una función periódica, y su **período** es π .
3. La función $y = \tan x$ es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan x$.
4. La gráfica de $y = \tan x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = n\pi$, para todo número entero n .

