LIBRO MATEMÁTICA
4° MEDIO

2025

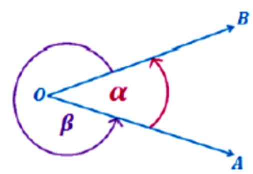
COLEGIO SAN IGNACIO DE LA SSALLE

Contenidos

EJE GEOMETRÍA

Ángulos

Un ángulo es el conjunto de puntos formados por dos rayos que emanan de un mismo origen. Se identifican por medio de las letras griegas minúsculas, α, β, γ, etc. y se representan como se muestran a continuación:



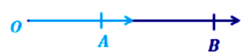
Como podemos ver la unión de los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en el vértice O forma dos ángulos: α denominado ángulo interior y β denomindo ángulo exterior.

En general, cuando hablemos de ángulos estamos haciendo referencia al ángulo interior, a menos que se indique lo contrario.

4.2 Clasificación de los ángulos según su medida

Ángulo Nulo

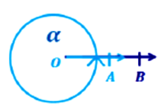
Corresponde aquellos ángulos que miden 0°.



$\measuredangle AOB = 0°$

Ángulo Completo

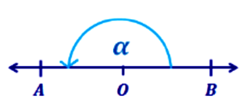
Corresponde aquellos ángulos que miden 360°, es decir, el círculo completo.



$\measuredangle AOB = 360° = \alpha$

Ángulo Extendido

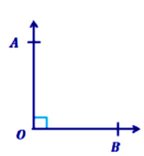
Corresponde aquellos ángulos que miden la mitad de un ángulo completo, es decir, 180°.



$\measuredangle AOB = 180° = \alpha$

Ángulo Recto

Corresponde aquellos ángulos que miden la mitad de un ángulo extendido, es decir, 90°.

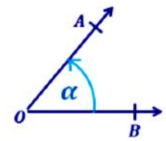


$\measuredangle AOB = 90° = \alpha$

Cuando dos rayos forman un ángulo recto se dicen que son **perpendiculares** entre sí, esto se simboliza como $\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{OB}$

Ángulo Agudo

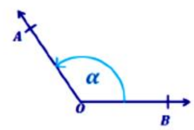
Corresponden a los ángulos que miden entre 0° y 90°.



$$0^\circ < \measuredangle AOB < 90^\circ$$

Ángulo Obtuso

Corresponden a los ángulos que miden entre 90° y 180°.

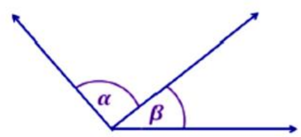


$$90^\circ < \measuredangle AOB < 180^\circ$$

Ángulos en un mismo plano

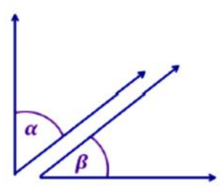
Ángulos Adyacentes

Dos ángulos son adyacentes si tienen un vértice y un lado en común, de tal forma que sus interiores no se intersectan.



Ángulos Complementarios

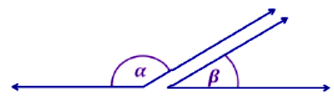
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a un ángulo recto, es decir, suman 90°.



$$\alpha + \beta = 90$$

Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas corresponde a un ángulo extendido, es decir, suman 180°.



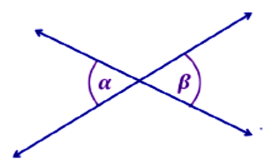
$$\alpha + \beta = 180$$

En el caso de dos ángulos suplementarios, decimos que α es el suplemento de β, es decir:

$$180 - \alpha = \text{Suplemento de } \alpha$$

Ángulos Opuestos por el Vértice

Dos ángulos son opuestos por el vértice si los lados de uno corresponden a las prolongaciones de los lados del otro.

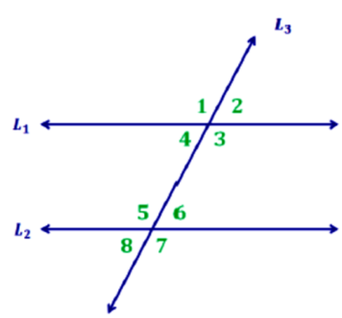


Siempre que tenga dos ángulos opuestos por el vértice sus medidas van a ser iguales:

$$\alpha = \beta$$

Ángulos formados por una transversal

Cuando tenemos dos rectas paralelas, L_1 y L_2, que son cortadas por una transversal L_3, no necesariamente perpendicular, entonces aparecen 8 ángulos que se relacionan entre sí de la siguiente manera:



- Son **ángulos correspondientes** los pares de ángulos 1-5, 2-6, 4-8 y 3-7.
- Son **ángulos alternos internos** los pares de ángulos 4-6 y 3-5. Se denominan ángulos interiores a los 4 ángulos que quedan entre las paralelas, a los demás ángulos se les denomina exteriores.
- Son **ángulos alternos externos** los pares de ángulos 1-7 y 2-8.
- Son **ángulos opuestos por el vértice** los pares de ángulos 1-3, 2-4, 5-7 y 6-8 de acuerdo a la propiedad anteriormente vista.

La propiedad que cumplen todas estas relaciones es que los **ángulos relacionados son congruentes**, es decir, tienen la misma medida.

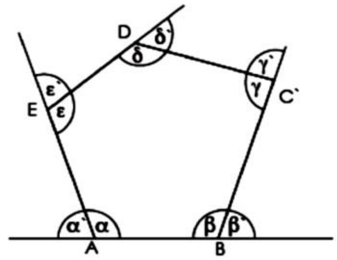
Polígonos

Un polígono es una figura plana cerrada, limitada por trazos llamados lados, que se interceptan sólo en sus puntos extremos llamados vértices.

El segmento que uno dos vértices no consecutivos recibe el nombre de diagonal.

Los polígonos se clasifican en cóncavos y convexos. Los polígonos cóncavos son aquellos con todos sus ángulos interiores menores a 180°, en cambio un polígono convexo tiene al menos un ángulo interior mayor a 180°.

En el transcurso de este libro veremos las propiedades que se pueden aplicar solo a polígonos cóncavos.



NOMBRE DE POLÍGONOS

TRIÁNGULO	3 LADOS
CUADRILÁTERO	4 LADOS
PENTÁGONO	5 LADOS
HEXÁGONO	6 LADOS
HEPTÁGONO	7 LADOS
OCTÓGONO	8 LADOS
ENEÀGONO	9 LADOS
DECÁGONO	10 LADOS
ENDECÁGONO	11 LADOS
DODECÁGONO	12 LADOS

POLÍGONOS REGULARES

Los **polígonos regulares** son aquellos que tienen sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

Cálculo medida de ángulo interior:

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$$

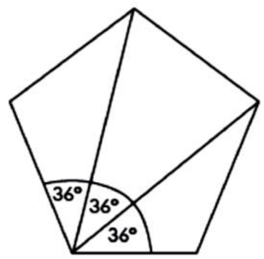
Cálculo medida de ángulo exterior:

$$\alpha' = \frac{360°}{n}$$

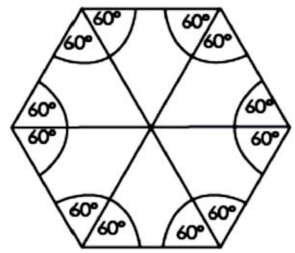
N°	Nombre	Suma de ángulos Interiores	c/ ∢ Int	c/ ∢ ext
3	Triángulo equilátero	180°	60°	120°
4	Cuadrado	360°	90°	90°
5	Pentágono regular	540°	108°	72°
6	Hexágono regular	720°	120°	60°

IMPORTANTE:

» Al trazar las diagonales en cualquier polígono regular, éstas dividen al ángulo interior en partes iguales. Ejemplo: Pentágono regular



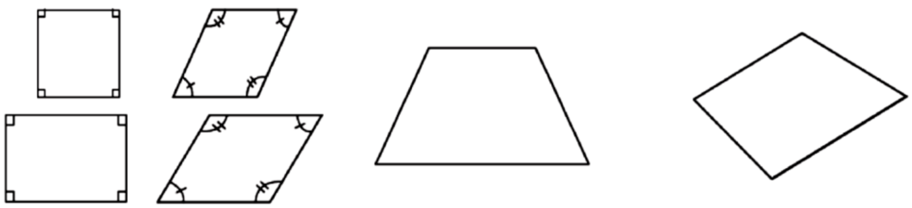
» En un hexágono regular, las diagonales son bisectrices de los ángulos interiores, y éstas dividen al hexágono en 6 triángulos equiláteros congruentes.



Cuadriláteros

Cuadrilátero es cualquier polígono de 4 lados, estos los podemos clasificar en:

i. Paralelogramos	ii. Trapecios	iii. Trapezoides
2 pares de lados paralelos	1 par de lados paralelos	Ningún par de lados paralelos



a. Propiedades comunes

+ Los ángulos opuestos son congruentes.

$\sphericalangle A = \sphericalangle C \quad ; \quad \sphericalangle B = \sphericalangle D$

+ Los ángulos consecutivos son suplementarios.

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle C + \sphericalangle D = \sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$

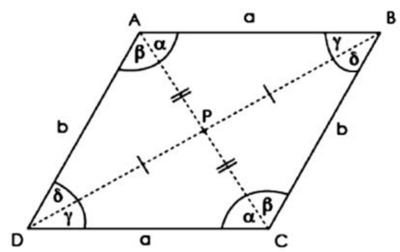
+ Los lados opuestos son congruentes

$\overline{AB} = \overline{CD} \quad ; \quad \overline{AD} = \overline{BC}$

+ Las diagonales de un paralelogramo se dimidian.

$\overline{AP} = \overline{PC} \quad ; \quad \overline{BP} = \overline{PD}$

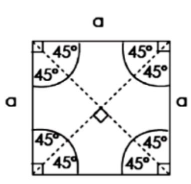
+ Las diagonales lo dividen en 4 triángulos de igual área.



Clasificación de paralelogramos

i. Cuadrado

Sus ángulos interiores son rectos y sus lados son congruentes.



Características:

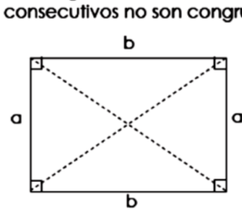
- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices
- Diagonales de igual medida

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: a^2 ó $\frac{(\text{Diagonal})^2}{2}$

ii. Rectángulo

Tiene sus ángulos interiores rectos y los lados consecutivos no son congruentes



Características:

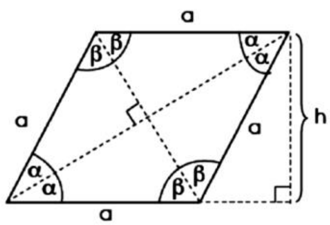
- Diagonales de igual medida

Perímetro: $2a + 2b$

Área: $a \cdot b$

iii. Rombo

Tienen sus lados congruentes y sus ángulos interiores NO son rectos.



Características:

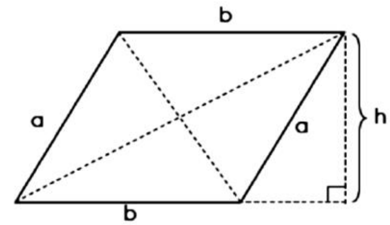
- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: $a \cdot h$ ó $\dfrac{(\text{Diag } 1 \cdot \text{Diag } 2)}{2}$

iv. Romboide

Sus ángulos interiores NO son rectos y sus lados consecutivos NO son congruentes.



Características:

- Solo las comunes a todo paralelogra-mo–

Perímetro: $2a + 2b$

Área: $b \cdot h$

TRAPECIO

Trapecio es aquel cuadrilátero que tiene sólo un par de lados paralelos, llamados bases. Sus ángulos colaterales internos entre las bases son suplementarios. Es decir, en la figura:

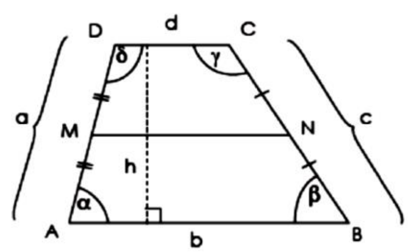
$$\alpha + \delta = 180° \quad ; \quad \beta + \gamma = 180°$$

La mediana ($\overline{MN}$) es la unión de los puntos medios de los lados no paralelos. Esta es paralela a las bases.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{MN}$; $\overline{AM} = \overline{MD}$ y $\overline{BN} = \overline{NC}$

La medida de la mediana corresponde al promedio de las bases.

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

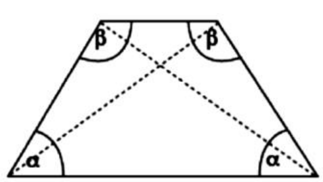


Perímetro: $a + b + c + d$

Área: $\overline{MN} \cdot h$

Trapecios notables

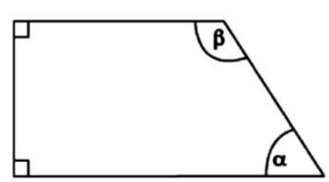
a. Trapecio Isósceles



Características:

- Lados no paralelos congruentes.
- Diagonales congruentes.
- Ángulos basales congruentes.
- Ángulos opuestos suplementarios.

b. Trapecio Rectángulo



Característica:

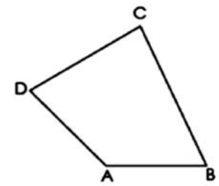
- Uno de sus lados es perpendicular a los lados paralelos

TRAPEZOIDE

Trapezoide es aquel cuadrilátero que no tiene par de lados paralelos. Los trapezoides se clasifican en asimétricos y simétricos.

i. Trapezoide asimétrico

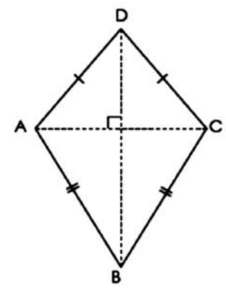
- Cuadrilátero sin lados paralelos y que no tiene ejes de simetría.
- Su área se puede calcular sólo si es posible descomponerlo en figuras conocidas.



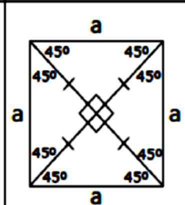
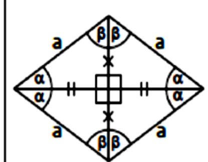
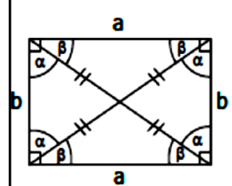
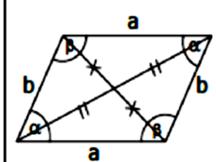
ii. Trapezoide simétrico (deltoide)

- Una de las diagonales cumple la función de base ($\overline{AC}$) y la otra diagonal cumple la función de eje de simetría ($\overline{BD}$).
- Las diagonales son perpendiculares entre sí ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$)
- La diagonal, $\overline{BD}$, divide al deltoide en dos triángulos congruentes.
- La diagonal, $\overline{AC}$, divide al deltoide en dos triángulos isósceles, cada uno de base $\overline{AC}$.

Área deltoide: $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$

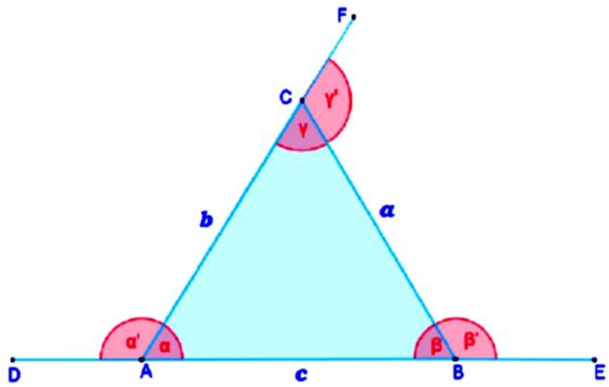


CLASIFICACIÓN Y PROPIEDADES

NOMBRE / PROPIEDADES	CUADRADO	ROMBO	RECTÁNGULO	ROMBOIDE
				
Lados opuestos congruentes	✓	✓	✓	✓
Ángulos opuestos congruentes	✓	✓	✓	✓
Las diagonales se dimidian	✓	✓	✓	✓
Ángulos contiguos suplementarios	✓	✓	✓	✓
Diagonales perpendiculares	✓	✓		
Diagonales bisectrices	✓	✓		
Diagonales congruentes	✓		✓	

Triángulos

El triángulo es una figura plana formada por la unión de tres rectas que se cortan de dos en dos.



Propiedades de los triángulos

- En un triángulo la medida de un ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.

$\alpha' = \beta + \gamma$ $\beta' = \alpha + \gamma$ $\gamma' = \alpha + \beta$

- En un triángulo la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- En un triángulo la suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a 360°.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

- En un triángulo al lado más grande se le opone el ángulo más grande.

$$c > a \text{ y } c > b \Longrightarrow \gamma > \alpha \text{ y } \gamma > \beta$$

- En un triángulo al ángulo más grande se le opone el lado más grande.

$$\alpha < \gamma \text{ y } \beta < \gamma \Longrightarrow a < c \text{ y } b < c$$

- En un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos lados.

$a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$

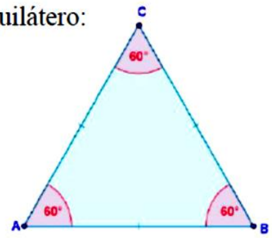
- En un triángulo, cada lado es mayor que la diferencia de los otros dos lados.

$a > |c - b|$ $b > |c - a|$ $c > |b - a|$

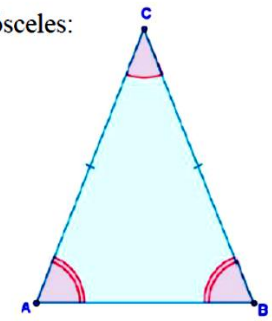
Clasificación de los triángulos

De acuerdo a la medida que tienen sus lados

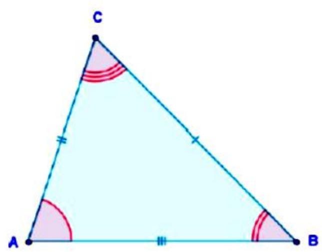
Triángulo Equilátero:



Triangulo Isósceles:

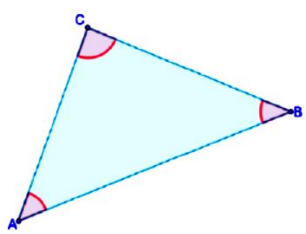


Triángulo Escaleno:

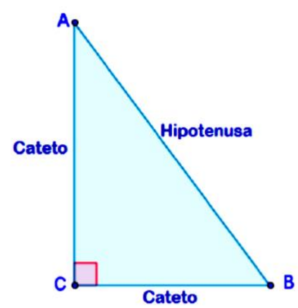


De acuerdo a la medida que tienen sus ángulos

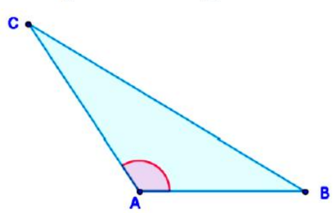
Triángulo Acutángulo:



Triángulo Rectángulo:



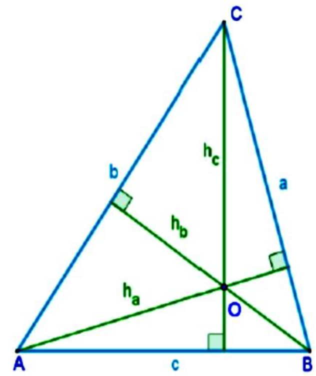
Triángulo Obtusángulo:



Elementos secundarios del triángulo

ALTURA

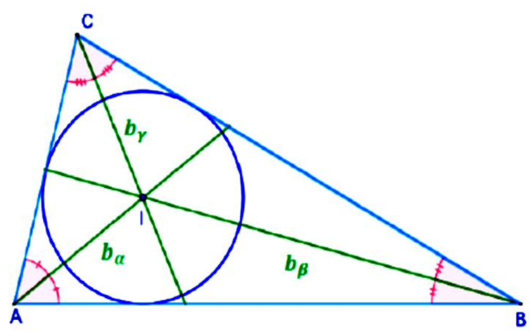
La altura corresponde a la recta que pasa por un vértice y que es perpendicular al lado opuesto de éste. Todo triángulo posee 3 alturas que se denominan por h_a, h_b y h_c de acuerdo al lado al cual es perpendicular.



Las tres alturas se intersectan en un punto llamado **ortocentro** (O) .

BISECTRIZ

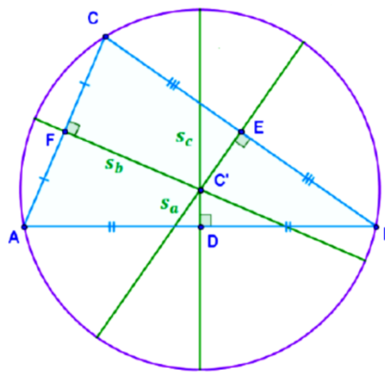
La bisectriz corresponde a la recta que pasa por un vértice y que divide al ángulo interior en dos ángulos congruentes, es decir, con la misma medida. Todo triángulo posee 3 bisectrices que se representan por b_α, b_β y b_γ de acuerdo al ángulo que estan dividiendo.



Las tres bisectrices se intersectan siempre en el interior del triángulo en un punto llamado **incentro** (I). Este punto equidista de los 3 lados del triángulo y corresponde al centro de la circunferencia inscrita en él.

SIMETRAL

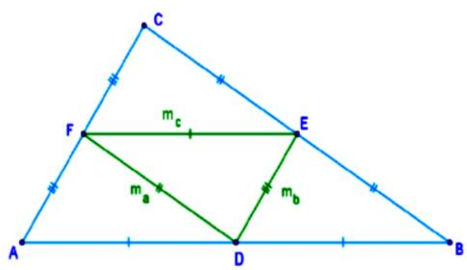
La simentral o también conocida como mediatriz corresponde a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo. Todo triángulo posee 3 simetrales que se designan por s_a, s_b y s_c de acuerdo al lado al que son perpendiculares.



Las tres simetrales se intersectan en un punto llamado **circuncentro** (C'). Este punto equidista de los 3 vértices del triángulo y corresponde al centro de la circunferencia circunscrita en él.

MEDIANA

La mediana corresponde al segmento que une un par de puntos medios de los lados del triángulo. Todo triángulo posee 3 mediana que se designan por m_a, m_b y m_c de acuerdo al lado al cual es paralelo.



Las medianas a diferencias de los otros elementos secundarios de un triángulo no se intersectan entre sí, pero cumplen las siguientes propiedades:

- Al trazar las tres medianas se forman 4 triángulos equivalentes, es decir, con igual área.

$$\text{Área } \triangle AFD = \text{Área } \triangle DEB = \text{Área } \triangle FCE = \text{Área } \triangle EDF$$

- Cada mediana es paralela al lado opuesto.

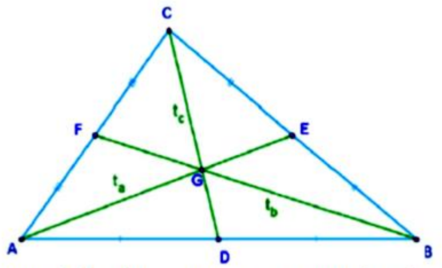
$$m_a \parallel \overline{BC}$$
$$m_b \parallel \overline{AC}$$
$$m_c \parallel \overline{AB}$$

- Cada mediana mide la mitad del lado al cual es paralela.

$$2m_a = \overline{BC}$$
$$2m_b = \overline{AC}$$
$$2m_c = \overline{AB}$$

TRANSVERSAL DE GRAVEDAD

La transversal de gravedad corresponde a la recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto a éste. Todo triángulo posee 3 transversales de gravedad que se designan por t_a, t_b y t_c de acuerdo al lado al que llegan.



Las tres transversales de gravedad se intersectan en un punto interior del triángulo denominado **centro de gravedad** (G) o **baricentro**. Esta recta notable con su respectivo punto cumplen las siguientes particularidades:

- Al trazar las tres transversales de gravedad se forman 6 triángulos equivalentes entre sí, es decir, que tienen igual área.

$$\text{Á } \triangle AGD = \text{Á } \triangle DGB = \text{Á } \triangle BGE = \text{Á } \triangle EGC = \text{Á } \triangle CGF = \text{Á } \triangle FGA$$

- El baricentro divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos que están en la razón $2:1$, de manera que el segmento adyacente al lado mide la mitad que el segmento adyacente al vértice. Si A, B y C corresponden a los vértices del $\triangle ABC$ y E, F y G corresponden a los puntos medios de sus tres lados, entonces podemos obtener las siguientes relaciones:

$$2\overline{GE} = \overline{AG}$$
$$2\overline{GF} = \overline{BG}$$
$$2\overline{GD} = \overline{CG}$$

- Si unimos el baricentro G con los vértices del triángulo, obtenemos 3 triángulos equivalentes, es decir, con igual área.

$$\text{Área } \triangle AGB = \text{Área } \triangle BGC = \text{Área } \triangle CGA$$

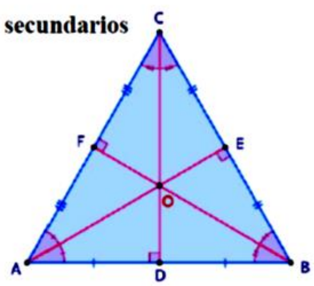
Particularidades de los elementos secundarios

Triángulo Equilátero

$\overline{AE} = h_a = b_\alpha = t_a = s_a$

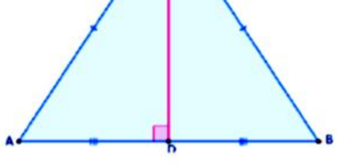
$\overline{BF} = h_b = b_\beta = t_b = s_b$

$\overline{CD} = h_c = b_\gamma = t_c = s_c$



Triángulo Isósceles

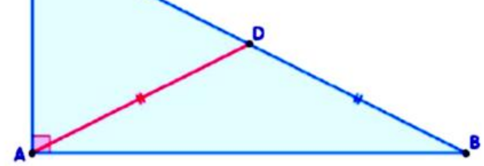
$\overline{CD} = h_c = b_\gamma = t_c = s_c$



Triángulo rectángulo

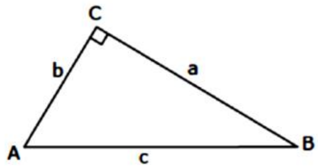
$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{DC}$

AD transversal



Teorema de Pitágoras

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

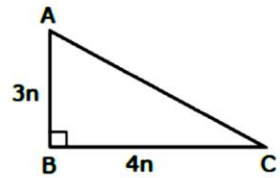


Ternas notables

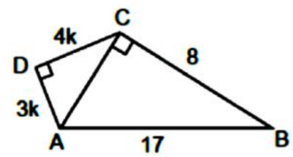
Cateto	Cateto	Hipotenusa
3k	4k	5k
5k	12k	13k
8k	15k	17k

Ejemplos

1) AC =

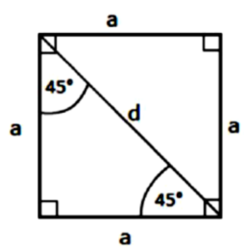


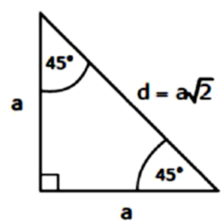
2) AD =



Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

En todo cuadrado, su diagonal puede ser expresada en función de su lado utilizando el teorema de Pitágoras.



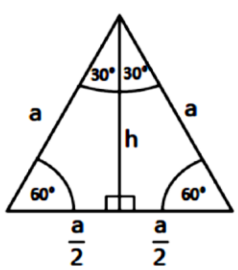


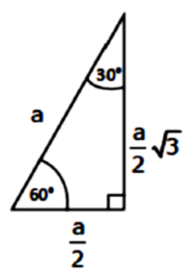
$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

En todo triángulo equilátero, la altura puede ser expresada en función de su lado utilizando el teorema de Pitágoras.



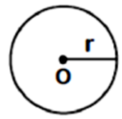
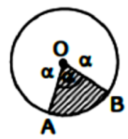


$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

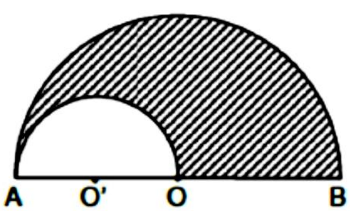
$$\downarrow$$

$$\boxed{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

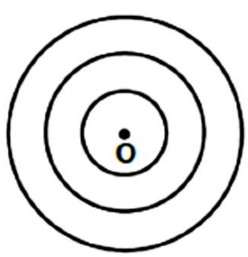
Circunferencia y círculo

Nombre	Figura	Perímetro	Área
Circunferencia y Círculo		$D\pi = 2\pi r$ D Diámetro	Del círculo πr^2
Sector circular		$\widehat{AB} + 2r$ $\widehat{AB} = \dfrac{\alpha \cdot 2\pi r}{360^o}$	$\dfrac{\alpha \cdot \pi r^2}{360^o}$

1 En la figura adjunta el segmento AB mide 12 cm. Si los segmentos AB y AO son los diámetros de las semicircunferencias de centros O y O' respectivamente, entonces el área y el perímetro de la región achurada son respectivamente.



2 En la figura adjunta, las tres circunferencias son concéntricas y el radio de la menor es 5 cm. Si el área de cada una de ellas es la mitad del área de la anterior, entonces el radio de la más grande es



Cuerpos geométricos

Los cuerpos son figuras de tres dimensiones limitadas por superficies planas o curvas. Dentro de las familias de cuerpos encontramos dos tipos: los cuerpos de caras planas llamados **poliedros**, y los de caras curvas.

Poliedro:

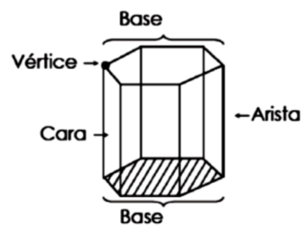
Los poliedros son cuerpos limitados por cuatro o más polígonos, en el que cada polígono se denomina **cara,** sus lados son **aristas** y la intersección de las aristas se llaman **vértices.**

Dentro de los poliedros identificamos uno de gran importancia: el **Prisma.**

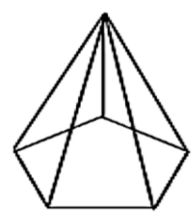
El Prisma es un cuerpo formado por dos caras paralelas congruentes, llamadas bases. Todas las caras laterales son paralelogramos.

Ejemplo:

Prisma de base hexagonal



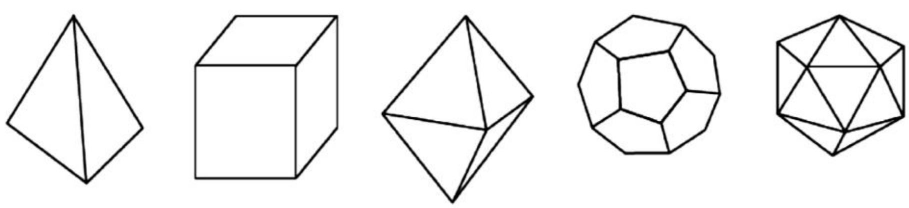
Pirámide: Tienen una base y sus caras laterales son triángulos.



Poliedros regulares

Los poliedros regulares son aquellos en los cuales todas las caras son polígonos regulares congruentes. Existen solo cinco poliedros regulares, ellos son:

Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro

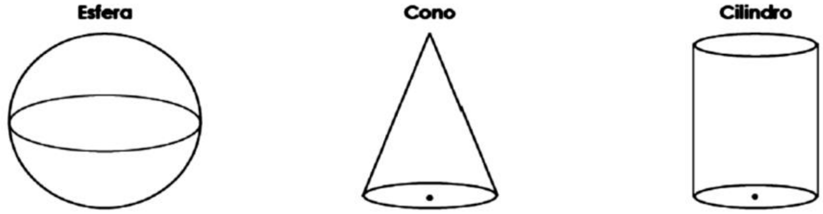


Formado por 4 triángulos equiláteros	Formado por 6 cuadrados	Formado por 8 triángulos equiláteros	Formado por 12 pentágonos regulares	Formado por 20 triángulos equiláteros

Cuerpos redondos

Los cuerpos redondos son cuerpos geométricos en los cuales al menos una de sus superficies son curvas. Se producen a partir de la rotación indefinida de una figura plana. Los cuerpos redondos más conocidos son la esfera, el cono, el cilindro.

Esfera Cono Cilindro

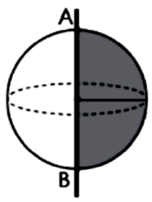


Cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas

i. Cuerpos de revolución

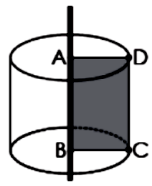
Los cuerpos de revolución se obtienen haciendo girar una superficie plana alrededor de un eje. Algunos ejemplos son:

Esfera



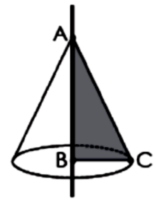
Giro de un semi–círculo de arco AB.

Cilindro



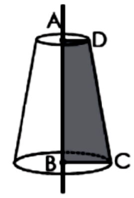
Giro de un rectángulo ABCD en torno a $\overline{AB}$.

Cono



Giro de un triángulo rectángulo ABC en torno al cateto $\overline{AB}$

Semi–Cono

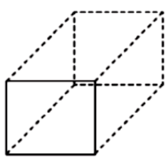


Giro de un trapecio rectángulo ABCD en torno a $\overline{AB}$

ii. Cuerpos de traslación

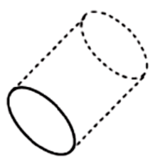
Se generan por traslación de una superficie plana, en sentido perpendicular al plano que la contiene. Algunos ejemplos son:

Paralelepípedo



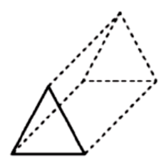
Traslación de un rectángulo.

Cilindro



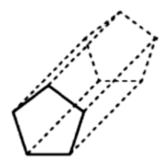
Traslación de un círculo.

Prisma triangular



Traslación de un triángulo.

Prisma pentagonal

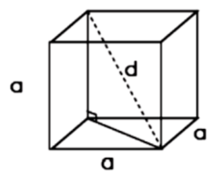


Traslación de un pentágono

Área y volumen de figuras 3D

Fórmulas de Cuerpos

i. Cubo

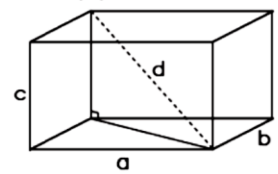


Área: $6 \cdot a^2$

Volumen: a^3

Diagonal (d) : $a \cdot \sqrt{3}$

ii. Paralelepípedo

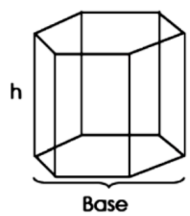


Área: $2(a \cdot b) + 2(b \cdot c) + 2(a \cdot c)$

Volumen: $(a \cdot b \cdot c)$

Diagonal (d): $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

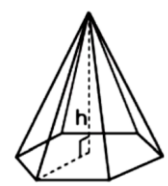
iii. Prisma



Área: Suma de las áreas laterales y basales

Volumen: Área basal $\cdot h$

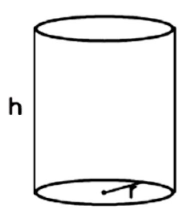
iv. Pirámides



Área: Suma de las áreas basal y laterales

Volumen: $\frac{1}{3} \cdot$ Área basal $\cdot h$

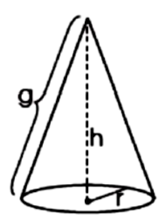
v. Cilindros



Área: $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Volumen: $\pi \cdot r^2 \cdot h$

vi. Conos

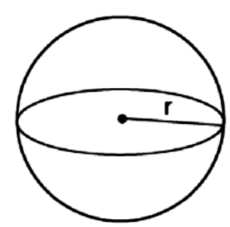


Generatriz: $g = \sqrt{(r)^2 + (h)^2}$

Área: $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$

Volumen: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

vii. Esferas

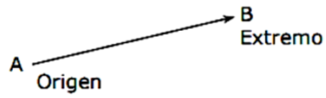


Área: $4 \cdot \pi \cdot r^2$

Volumen: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

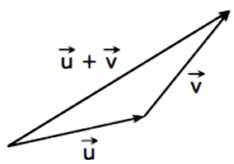
Vectores

Un vector es un segmento de recta orientado (flecha), caracterizado por
* Módulo: es la longitud del segmento
* Dirección: está dada por la recta por la cual transita el vector
* Sentido: uno de los dos sentidos dados por la recta que pasa por él (indicado por la flecha)



OBSERVACIONES

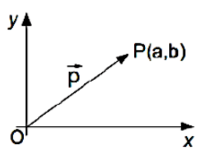
* Dos vectores son iguales si tienen igual módulo, dirección y sentido.
* Los vectores se expresan con una letra minúscula y una flecha sobre dicha letra o con dos letras mayúsculas, que indican su origen y su extremo respectivamente.
* Geométricamente para sumar dos vectores u y v hacemos lo siguiente; ponemos v a continuación de u, haciendo coincidir el origen de v con el extremo de u. Luego u + v es el vector que va desde el origen de u hasta el extremo de v cuando hemos puesto v a continuación de u



Dado un vector u el vector -u es el inverso aditivo de u, teniendo igual módulo, dirección, pero sentido contrario

Vector de posición

Supongamos que tenemos un punto P en el plano cartesiano bidimensional, el vector cuyo punto inicial es el origen del sistema cartesiano y el punto final es el punto P, se llama vector de posición del punto P y generalmente se designa utilizando la letra minúscula que designa al punto:



DEFINICIONES

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vectores y sea **K** un número real

MÓDULO O MAGNITUD DE UN VECTOR $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN $\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)}$

PONDERACIÓN POR UN ESCALAR (REAL) K $\boxed{K \cdot \vec{a} = K \cdot (a_1, a_2) = (K \cdot a_1, K \cdot a_2)}$

Dado dos puntos encontrar el vector que tiene origen en A

Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ no anclado en el origen, con $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Transformaciones isométricas

Transformaciones isométricas: son transformaciones (movimientos) que se aplican sobre una figura de manera que la figura resultante es congruente con la figura inicial, es decir, mantiene forma y tamaño. Las transformaciones isométricas son: traslación, rotación, simetría central y simetría axial.

Traslación

Para trasladar un punto o figura, se necesita un **vector traslación**, el cual nos indica hacia dónde y cuánto se traslada la figura. (dirección, sentido y magnitud)

Para obtener la posición de un punto trasladado en el plano cartesiano, se deben sumar las coordenadas del punto inicial (x , y) más las coordenadas del vector traslación (u , v).

Punto inicial + Vector de traslación = Punto final

$$(x, y) + T(u, v) = (x+u, y+v)$$

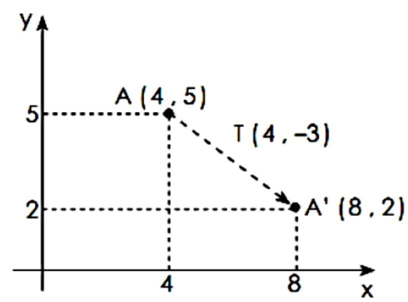
En caso de tener las coordenadas del punto inicial y final, y necesitar el vector traslación, este se encuentra restando las coordenadas del punto final menos el inicial, en ese orden.

Ejemplo:

Si al punto A de coordenadas (4 , 5), se le aplica una traslación dada por el vector traslación T(4 , –3), entonces se obtiene el punto:

$$(4, 5) + T(4, -3) = (4+4, 5+(-3))$$
$$= (8, 2)$$

Gráficamente, esto es:



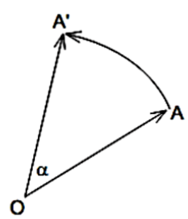
Observaciones

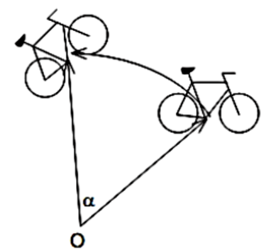
- Una figura conserva todas sus dimensiones, tanto lineales como angulares.
- Una figura jamás rota; es decir, el ángulo que forma con la horizontal no varía.
- No importa el número de traslaciones que se realicen, siempre es posible resumirlas en una única.

Rotación o giro con respecto a un punto

Si el punto A se gira en $\alpha°$ con respecto al punto O de la figura, entonces queda en un punto A' de modo que OA = OA' y $\sphericalangle$AOA' = α.

Se entenderá, a no ser que se indique lo contrario, que el sentido del giro es contrario al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario).





- Una rotación con centro P y ángulo de giro α, se representa por R (P, α). Si la rotación es negativa, se representa por R (P, $-\alpha$).
- El centro de rotación se mantiene invariante ante una rotación.
- Si rotamos el punto (x, y) con respecto al origen 0(0, 0) en un ángulo de giro de 90º, 180º, 270º ó 360º, las coordenadas de los puntos obtenidos están dados en la siguiente tabla.

Punto Inicial	R (0, 90º)	R (0, 180º)	R (0, 270º)	R (0, 360º)
(x, y)	(-y, x)	(-x, -y)	(y , -x)	(x , y)

Rotaciones en torno a un punto distinto al origen

En caso que el centro de rotación no sea el origen, el proceso para realizar la rotación es:

1^{ro}, encontrar el vector traslación que lleva el centro de rotación C hacia el punto a rotar A (vector $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}$).

2^{do}, aplicar al vector resultante $\overrightarrow{CA}$ la rotación requerida, utilizando la tabla anterior.

3^{ro}, sumar al centro de rotación, el vector obtenido en el paso 2.

Ejemplo:

Si al punto A(11 , 5), se le aplica una rotación de 90° en torno al punto C(6 , 2), se obtiene el punto:

1^{ro} $\overrightarrow{CA}$: A(11 , 5) – C(6 , 2) = T(5 , 3)

2^{do} Rotar T (5 , 3) 90°: Usando la tabla, resulta

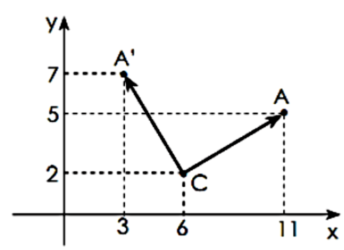
(x , y)	(–y , x)
(5 , 3)	(–3 , 5)

T' (–3 , 5)

3^{ro} Sumar C + T':

C(6 , 2) + T' (–3 , 5) = A' (3 , 7)

Gráficamente esto es:



SIMETRÍAS

Las **simetrías** o **reflexiones**, son aquellas transformaciones isométricas que invierten los puntos y figuras del plano. Esta reflexión puede ser respecto de un punto (**simetría central**) o respecto de una recta (**simetría axial**).

SIMETRÍA CENTRAL

Dado un punto fijo O del plano, se llama **simetría (reflexión) con respecto a O** a aquella isometría que lleva cada punto P del plano a una posición P′ de modo que P′ está en la recta OP, a distinto lado con respecto a O, y $\overline{OP} = \overline{OP'}$. El punto O se llama **centro de la simetría** y P, P′ puntos **correspondientes u homólogos** de la simetría.
La figura 1 muestra un triángulo simétrico con respecto a O

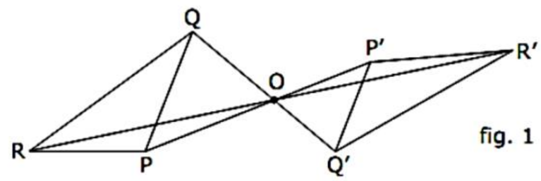


fig. 1

$\overline{OP} = \overline{OP'}$
$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$
$\overline{OR} = \overline{OR'}$

OBSERVACIONES

* Una simetría (reflexión) respecto de un punto O equivale a una **rotación** en 180º de centro O.
* Los trazos de la figura original son paralelos con los trazos homólogos de la figura transformada.
* El sentido de la figura no cambia respecto al giro de las manecillas del reloj.
* Todo punto del plano cartesiano A(x, y) tiene su simétrico A′(-x, -y) con respecto al origen O(0, 0).

SIMETRÍA AXIAL

Dada una recta fija L del plano, se llama **simetría axial con respecto a L** o **reflexión con respecto a L,** a aquella isometría tal que, si P y P′ son puntos homólogos con respecto a ella, $\overline{PP'} \perp L$ y, además, el punto medio de $\overline{PP'}$ está en L. La figura 1, muestra dos triángulos simétricos respecto de L.

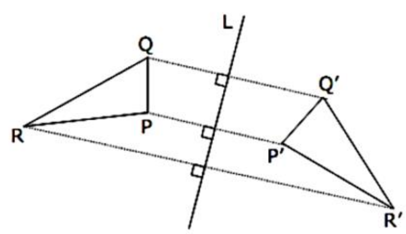


fig. 1

OBSERVACIONES

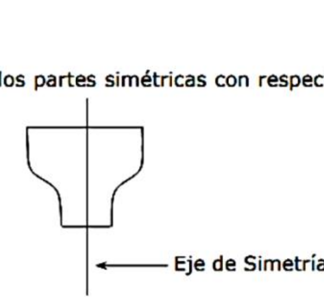
* En una simetría axial, las figuras cambian de sentido respecto del giro de las manecillas del reloj.
* No es posible superponer, mediante traslaciones y/o rotaciones, los triángulos congruentes PQR y P´Q´R´.
* Los puntos de la recta L permanecen invariantes ante esta reflexión.
* Todo punto del plano cartesiano A (x, y) tiene un simétrico A′ (x, -y) con respecto al eje de las abscisas y un simétrico A″ (-x , y) con respecto al eje de las ordenadas.

EJE DE SIMETRÍA

Es aquella recta que atraviesa una figura dividiéndola en dos partes simétricas con respecto a la recta.

OBSERVACIONES

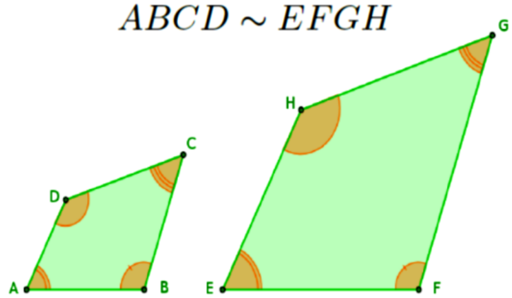
* Existen figuras que no tienen eje de simetría.
* Existen figuras que tienen sólo un eje de simetría.
* Existen figuras que tienen más de un eje de simetría.
* La circunferencia tiene infinitos ejes de simetría.



Semejanza

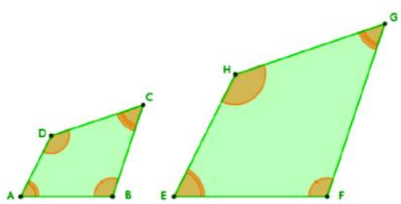
$$ABCD \sim EFGH$$

La semejanza hace referencia a la igualdad de forma entre dos figuras pero no necesariamente al mismo tamaño.



Condiciones para la semejanza

$$ABCD \sim EFGH$$



- Los ángulos homólogos son congruentes

$$\measuredangle DAB \cong \measuredangle HEF$$
$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle EFG$$
$$\measuredangle BCD \cong \measuredangle FGH$$
$$\measuredangle CDA \cong \measuredangle GHE$$

- Los lados homólogos son proporcionales.

$\overline{AB}$ es homólogo con $\overline{EF}$

$\overline{BC}$ es homólogo con $\overline{FG}$

$\overline{CD}$ es homólogo con $\overline{GH}$

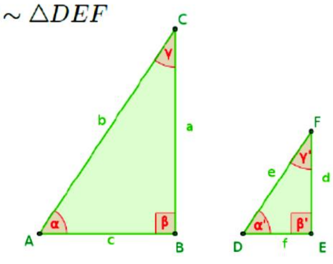
$\overline{DA}$ es homólogo con $\overline{HE}$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si los ángulos del primero son congruentes uno a uno con los ángulos del segundo.

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$



- Los ángulos correspondientes tienen la misma medida:

$$\alpha \cong \alpha'$$
$$\beta \cong \beta'$$
$$\gamma \cong \gamma'$$

- Los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \text{constante}$$

NOTAS:

»La congruencia es un caso particular de semejanza.

»Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes entre sí.

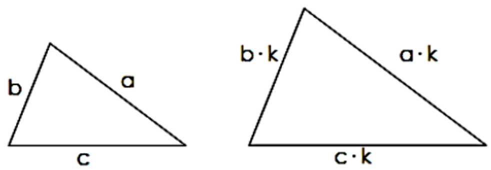
»Todas las circunferencias son semejantes entre sí.

»Todos los polígonos regulares de igual cantidad de lados son semejantes entre sí. (Triángulos equiláteros, cuadrados, entre otros)

Criterios de semejanza de triángulos

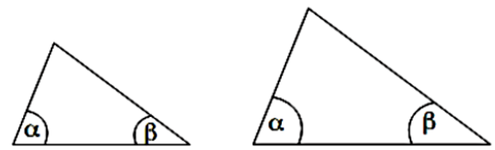
Los criterios de semejanza nos indican la información mínima necesaria para afirmar que dos triángulos son semejantes.

i. LLL



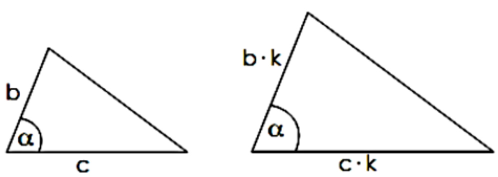
Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

ii. AA



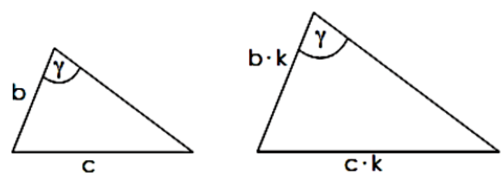
Dos triángulos son semejantes si dos ángulos correspondientes tienen igual medida.

iii. LAL



Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo correspondiente de igual medida y los lados adyacentes a él son proporcionales.

iv. LLA

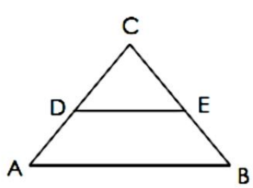


Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus lados correspondientes proporcionales, y los ángulos opuestos al mayor entre estos lados, congruentes.

Otras figuras semejantes

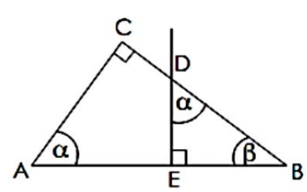
Toda paralela a un lado de un triángulo, determina un triángulo semejante al primero.

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$



En un triángulo rectángulo, toda perpendicular a alguno de los lados genera un triángulo semejante al primero.

Si $\overline{AB} \perp \overline{DE}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DBE$



Propiedades de triángulos semejantes

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k \Longleftrightarrow \frac{\text{Perímetro } \triangle ABC}{\text{Perímetro } \triangle DEF} = k$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k \Longleftrightarrow \frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle DEF} = k^2$$

La razón entre las medidas de los elementos secundarios correspondientes de los triángulos semejantes es igual a la razón entre dos lados correspondientes de los triángulos.

Homotecia

Es una transformación que a partir de un punto fijo (centro de homotecia) multiplica todas las distancias por un mismo factor (razón de homotecia). Es decir, al aplicar una homotecia de centro O y razón k a un punto P cualquiera, se obtiene otro punto P', tal que P, O y P' son colineales y **OP' = k · OP**
En la figura adjunta, O es centro de homotecia y k es la razón de homotecia.

Propiedades:

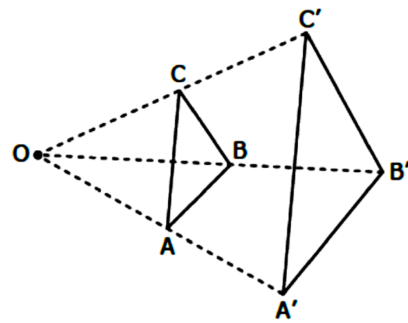
1) **Los ángulos de las figuras homotéticas tienen igual medida.**

2) $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$, $\overline{CA} \,//\, \overline{C'A'}$, $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$

3) $$\boxed{\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k}$$

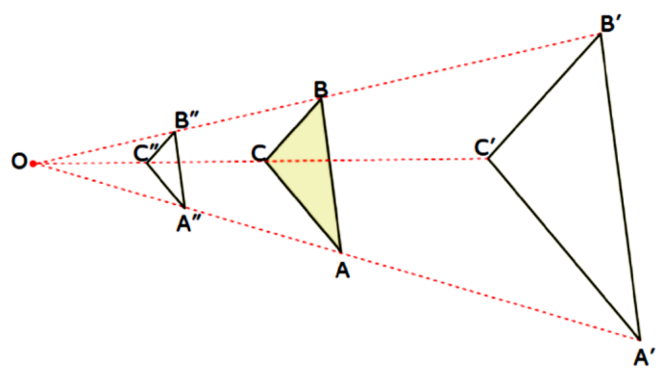
4) $$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k}$$

Entonces, $\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'}$



Homotecia de razón positiva (homotecia directa)

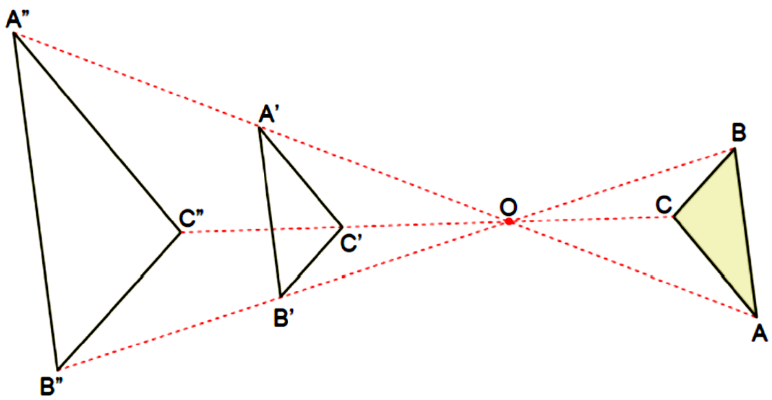
Si los puntos homotéticos están al mismo lado del centro de homotecia se denomina homotecia directa.



$$\boxed{\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k}$$

Homotecia de razón negativa (homotecia inversa)

Si los puntos están a distinto lado del centro de homotecia se denomina homotecia inversa.



$$\boxed{\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = -k}$$

OBSERVACIONES:

- **La homotecia permite ampliar o reducir figuras manteniendo la forma.**
- **Al aplicar una homotecia se obtiene una figura semejante a la original, por lo tanto, se cumplen todas las propiedades de las figuras semejantes.**
- **Dado k una razón de homotecia entonces, si $|k| > 1$ implica una ampliación de la figura, si $0 < |k| < 1$ implica una reducción de la figura.**
- **Los segmentos homólogos son paralelos.**
- **Al aplicar una homotecia de razón negativa se obtiene una imagen invertida de la figura original.**
- **La razón de homotecia siempre es:** $\boxed{\dfrac{\text{Figura homotética}}{\text{Figura original}}}$

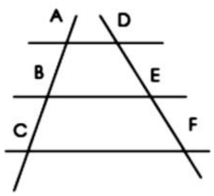
Teorema de Thales

Si tenemos rectas paralelas, que son cortadas por rectas transversales, estas rectas no paralelas quedarán divididas en segmentos proporcionales a los segmentos de las otras transversales.

Los casos más comunes son:

Caso 1:

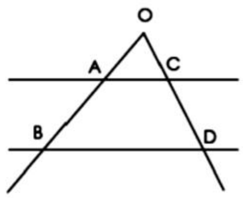
Si se cumple: $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Caso 2:

Si se cumple: $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ y las transversales se intersectan en el punto O.

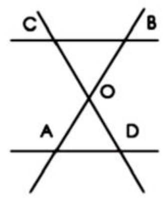


$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

Caso 3:

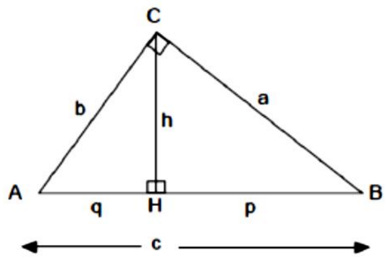
Si se cumple: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y las transversales se intersectan en el punto O.



$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$$

Teorema de Euclides

El triángulo ABC de la figura es un triángulo rectángulo en C y p y q son las proyecciones de a y b sobre la hipotenusa c.
Entonces se cumplen las siguientes propiedades:



- **Teorema de Euclides referente a la altura**
  El cuadrado de la altura equivale al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$$\boxed{h^2 = pq}$$

- **Teorema de Euclides referente al cateto**
  El cuadrado de un cateto equivale al producto entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre ella:

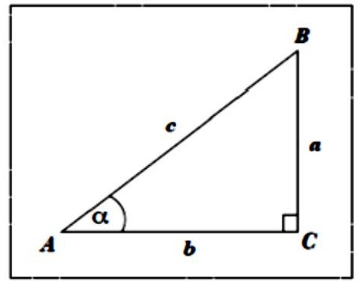
$$\boxed{a^2 = pc \;;\; b^2 = qc}$$

- **Cálculo de altura**
  La altura correspondiente a la hipotenusa equivale al producto de las longitudes de los catetos dividido por la longitud de la hipotenusa:

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Trigonometría

Razones trigonométricas



Si se tiene un triángulo rectángulo ABC, con α un ángulo interior agudo, a y b catetos, y de hipotenusa c, entonces se pueden establecer 6 razones entre las medidas de sus lados. El valor de estas razones no depende del tamaño del triángulo, sino de la medida de sus ángulos agudos. En efecto, si $\Delta\, A'B'C'$ es otro triángulo rectángulo tal que $\measuredangle A = \measuredangle A'$, entonces los triángulos son semejantes y se cumple:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Estas razones tienen nombres particulares:

- El ***seno*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa, es decir:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c}$$

- El ***coseno*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa, es decir:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

- La ***tangente*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud del cateto adyacente al ángulo, es decir:

$$\tan \alpha = tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

- La ***cotangente*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud del cateto opuesto al ángulo, es decir:

$$cotan\ \alpha = ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

- La ***secante*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente al ángulo, es decir:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

- La ***cosecante*** de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como la razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto al ángulo, es decir:

$$cosec\ \alpha = \csc \alpha = \frac{c}{a}$$

En resumen:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

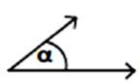
Valores de las funciones trigonométricas para ángulos más utilizados

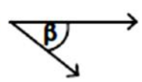
Función / α	seno α	coseno α	tangente α
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	indefinido
180°	0	−1	0
270°	−1	0	indefinido
360°	0	1	0

Aplicaciones

Ángulos de elevación y de depresión

Si consideramos un observador en un punto A y un objeto P situado en el mismo plano que A, podemos definir el ángulo de elevación y de depresión de A respecto a P de la siguiente forma:

- Ángulo de elevación 

Horizontal del observador
- Ángulo de depresión 

Horizontal del observador

EJE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Lenguaje algebraico

El álgebra corresponde a la generalización de las definiciones aritméticas a través de variables.

Una variable o coeficiente literal corresponde a la expresión de una cantidad conocida o desconocida mediante una letra, con la cual se puede operar relativamente de la misma forma que se hace con los números.

Ejemplo:

- "El doble del producto de dos números distintos" se representa como 2ab.

Operatoria de expresiones algebraicas

i. Reducción de términos semejantes

Un término es un conjunto de factores numéricos y literales precedido de un signo (+) o (–).

Los términos semejantes son aquellos términos que tienen igual factor literal. Esto quiere decir, iguales letras con iguales exponentes, aunque pueden estar en desorden ($2m^2n$, $-3m^2n$, $\frac{1}{3}nm^2$).

Para reducir términos semejantes se suman o restan los coeficientes numéricos y se mantiene el factor literal.

Ejemplos:

- $12ab + 4c + 6ab$
  $\underline{12ab} + 4c + \underline{6ab} = 18ab + 4c$
- $9m^2 + 7n - 4m^2 - n$
  $\underline{9m^2} + 7n \underline{- 4m^2} - n = 5m^2 + 6n$

TIPS:

» Recuerda considerar el signo que está a la izquierda del número.

Eliminando paréntesis

Los paréntesis se pueden eliminar de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si un paréntesis es antecedido de un signo (+), éste se puede eliminar sin modificar los signos de los términos contenidos en el.
- Si un paréntesis es antecedido de un signo (–) , éste se puede eliminar cambiando los signos de cada uno de los términos contenidos en él.

ii. Multiplicación de Polinomios

Monomio por monomio

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Ejemplo: $2(4 \cdot 3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Monomio por polinomio

$a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad$

Ejemplo: $-m(2 + m - n) = -2m - m^2 + mn$

Polinomio por polinomio

$(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$

Ejemplo: $(x + 2) (y - 3) = xy - 3x + 2y - 6$

Productos Notables

Los productos notables más comunes son:

Cuadrado de binomio

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo: $(x + 3y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2$
$= x^2 + 6xy + 9y^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo: $(5m - 4)^2 = (5m)^2 + 2 \cdot 5m \cdot 4 + (4)^2$
$= 25m^2 + 40m + 16$

Importante:
$(a - b)^2 = (b - a)^2$. Ej: $(3 - 1)^2 = (1 - 3)^2$
$(2)^2 = (-2)^2$

Suma por diferencia

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: $(2x + 1) \cdot (2x - 1) = (2x)^2 - (1)^2$
$= 4x^2 - 1$

Binomios con término común

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + (a \cdot b)$

Ejemplos:

- $(x + 3)(x + 7) = x^2 + (3 + 7) \cdot x + (3 \cdot 7)$
  $= x^2 + 10x + 21$
- $(5x + 4)(5x + 3) = (5x)^2 + (4 + 3) \cdot 5x + (4 \cdot 3)$
  $= 25x^2 + 35x + 12$

Cubo de binomio

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo:

- $(p + 4)^3 = p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot 4 + 3 \cdot p \cdot 4^2 + 4^3$
  $= p^3 + 12p^2 + 48p + 64$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo:

- $(x - 2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$
  $= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Factorizaciones

La factorización es el proceso contrario al producto, es decir, consiste en transformar una expresión algebraica en los factores que la originaron. Los tipos más comunes de factorización son:

i. Factor común

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

Ejemplo:

- $7m^3n + 14m^2 - 21m^4q = 7m^2(mn + 2 - 3m^2q)$

ii. Factor común compuesto

En muchas ocasiones, si bien no hay un factor común a todos los términos, agrupándolos convenientemente podemos ver en evidencia el factor común, que puede ser monomio o polinomio.

Ejemplo:

- $x^2 - ax - bx + ab = (x^2 - ax) - (bx - ab)$
  $= x(x - a) - b(x - a)$
  $= (x - a)(x - b)$

iii. Productos notables

Suma por diferencia:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Para encontrar a y b, se deben calcular las raíces cuadradas de a^2 y b^2.

Ejemplo:

- $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

Cuadrado de binomio:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplos:

- $m^2 + 10m + 25 = (m + 5)^2$
- $4p^2 - 4pq + q^2 = (2p - q)^2$

Binomio con termino común:

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + b),$$

$$\text{con } p = a + b \text{ y } q = a \cdot b$$

Para encontrar a y b, debes preguntarte, ¿qué números multiplicados dan q y sumados dan p?

Ejemplo:

- $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

Suma de cubos perfectos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

- $p^3 + 8 = (p + 2)(p^2 - 2p + 4)$

Resta de cubos perfectos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para encontrar a y b, debes calcular las raíces cubicas de a^3 y b^3.

Ejemplo:

- $27a^3 - 1 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$

Operaciones definidas

Estas operaciones combinan las operaciones conocidas utilizando un símbolo especial, definido en el ejercicio (@, #, ®, , ¶, ...). Cada ejercicio define lo que representa el símbolo.

Ejemplos:

- Dada la operación a # b = 2a – b. Hallar 5 # 7

  En este caso el símbolo # indica que al doble de a (1^er^ número), hay que restarle el b (2^do^ número).

  Entonces: $5 \# 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$

- Dada la operación $m @ n = m \cdot n + 5$. Hallar 3 @ 4

  En este caso el símbolo @ indica que se debe multiplicar m por n (1^er^ número por el 2^do^ número) y luego sumarle 5.

  Entonces: $3 @ 4 = 3 \cdot 4 + 5 = 17$

- Dada la operación $p \Delta q = \frac{p+q}{q}$. Hallar 7 @ 9

  Entonces: $7 \Delta 9 = \frac{7+9}{9} = \frac{16}{9}$

Proporcionalidad directa e inversa

RAZÓN

Es una comparación entre dos cantidades mediante una división o formando el cuociente entre ellas. Se escribe **a : b** o $\frac{a}{b}$, se lee **"a** es a **b"**; donde **a** se denomina antecedente y **b** consecuente.

El valor de la razón es el cuociente entre las cantidades: $\frac{a}{b} = c \rightarrow$ **Valor de la razón**

PROPORCIÓN

Es una igualdad formada por dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o a : b = c : d y se lee **"a** es a **b** como **c** es a **d"**, donde **a** y **d** son los extremos; **b** y **c** son los medios.

TEOREMA FUNDAMENTAL: "En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios".

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

OBSERVACIÓN: Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, existe una constante **k**, tal que

$$\boxed{a = c \cdot k,\; b = d \cdot k,\; k \neq 0}$$

SERIE DE RAZONES

Es la igualdad de más de dos razones. La serie de razones $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, también se escribe como x : y : z = a : b : c

PROPIEDAD BÁSICA

Para la serie de razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos variables **x** e **y** son **directamente proporcionales** si el **cuociente** entre sus valores correspondientes es **constante**

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k \text{ (k constante)}$$

Así por ejemplo, la tabla muestra la elaboración de jugo de manzana, de cada 15 kg de manzana se obtiene 9 litros de jugo.

Peso (kg)	5	10	15	x
Volumen (Lt)	3	6	9	y

Podemos observar que $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

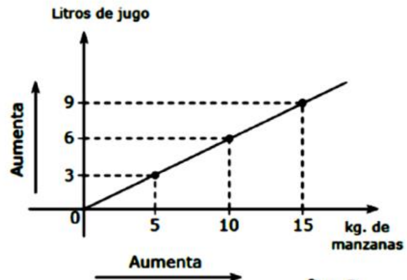


fig. 2

En una proporción directa, si una magnitud aumenta (disminuye) **n** veces, la otra aumenta (disminuye) el mismo número de veces

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al representar los pares de valores, los puntos se sitúan en una recta que pasa por el origen (fig. 2)

PROPORCIONALIDAD INVERSA Y COMPUESTA

Dos variables **x** e **y** son **inversamente proporcionales** cuando el **producto** entre las cantidades correspondientes se mantiene **constante**.

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = x_n \cdot y_n = k \text{ (k constante)}$$

Así por ejemplo, la tabla de la figura 4 muestra las medidas posibles de los lados de un rectángulo de área 24 cm^2.

Largo	2	3	4	6	x
Ancho	12	8	6	4	y

Podemos observar que $x \cdot y = 24$

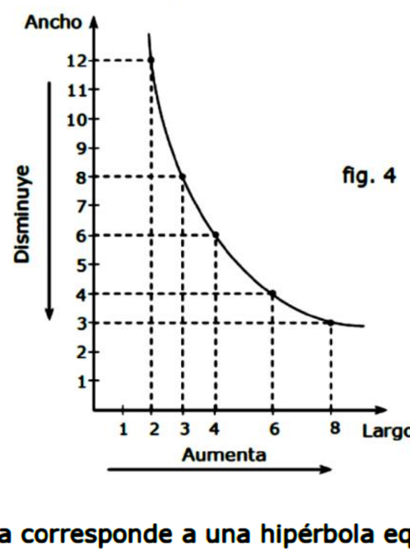


fig. 4

El gráfico de una proporcionalidad inversa corresponde a una hipérbola equilátera. (fig. 4)

La **proporcionalidad compuesta** es la combinación de proporcionalidades directas, inversas o ambas

Ecuaciones

Tipos de soluciones

Para resolver una ecuación de primer grado, $ax = b$, se debe aislar la incógnita, típicamente x. Al intentar despejar la incógnita, nos podemos encontrar con tres distintos tipos de soluciones:

Si $a \neq 0$, la ecuación tendrá **solución única** en el conjunto de los reales.

Ejemplo: $3x + 2 = 3$

$$3x = 3 - 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Solución: $\frac{1}{3}$

Si $a = 0$ y $b = 0$ la ecuación tiene **infinitas soluciones**. Conjunto de los números reales.

Ejemplo: $7x - 5 = -5 + 7x$

$$7x - 7x = -5 + 5$$

$$0 = 0$$

Solución: $\mathbb{R}$

Si $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación **no tiene solución.** Solución vacía.

Ejemplo: $3x + 2 = 1 + 3x$

$$3x - 3x = 1 - 2$$

$$0 = -1$$

Solución: $\emptyset$

Ecuaciones Literales

Son ecuaciones que, además de la incógnita, contienen otras letras que representan variables. Para resolverlas, se debe identificar la letra que representa la incógnita y despejarla.

Ejemplos:

- $ax + b = c \quad / -b$

  $ax = c - b \quad / : a$

  $x = \frac{c - b}{a}$

- $ax - a^2 = bx - b^2$

  $ax - bx = a^2 - b^2$ / factorizamos por x

  $x(a - b) = a^2 - b^2 \quad / : (a - b)$

  $x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$ / factorizamos para simplificar

  $x = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b}$

  $x = a + b$

Sistemas de ecuaciones

Dos ecuaciones de primer grado, que tienen ambas las mismas dos incógnitas, constituyen un sistema de ecuaciones lineales. La forma general de un sistema de ecuaciones de primer grado es:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$, donde a, b, c, d, e y f son números reales.

La solución del sistema será todo par (x , y) que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones.

a. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Para resolver un sistema lineal con dos incógnitas, lo podemos hacer mediante los siguientes métodos:

i. Método de sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones y luego reemplazarla en la otra ecuación, generándose así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $x = 2y$

$\rightarrow$ $2 \cdot (2 - y) + y = 5$
$4 - 2y + y = 5$
$y = -1$

$\rightarrow$ $x + (-1) = 2$
$x = 3$

ii. Método de igualación

Se debe despejar la misma variable en ambas ecuaciones y luego éstos resultados se igualan, generándose así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $y = 5 - 2x$
$y = 2 - x$

$\rightarrow$ $5x - 2x = 2 - x$
$5 - 2 = -x + 2x$
$x = 3$

$\rightarrow$ $(3) + y = 2$
$y = -1$

iii. Método de reducción

Se deben igualar los coeficientes numéricos de una de las incógnitas, en ambas ecuaciones, multiplicando a ambos lados de la igualdad convenientemente, obteniéndose un sistema equivalente al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones, resultando así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right| \cdot -1$

$\rightarrow$
$$\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ + \;\; -x - y = -2 \\ \hline x = 3 \end{array}$$

$\rightarrow$ $(3) + y = 2$
$y = -1$

Análisis de sistemas de ecuaciones

El análisis de sistemas de ecuaciones es un método rápido para conocer el tipo de solución que tiene un sistema sin necesidad de tener que resolverlo.

Dado: $\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$, entonces el sistema:

i. Tiene **solución única** si:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}$

ii. Tiene **infinitas soluciones** si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y = 24 \\ 2x + 4y = 16 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{24}{16}$

iii. **Tiene solución vacía** si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x - 4y = 7 \\ 3x - 6y = 5 \end{array}\right|$

$\rightarrow$ $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} \neq \frac{7}{5}$

Desigualdades

Una desigualdad es una relación de orden entre dos números. Sean los números reales a, b y c:

Las desigualdades se llaman **estrictas** si los números deben ser necesariamente distintos.

- $c > a$, Se lee: "c es mayor que a"
- $b < a$. Se lee: "b es menor que a"

Las desigualdades se llaman **no estrictas** si los números pueden ser iguales.

- $c \geq a$, Se lee: "c es mayor o igual que a"
- $b \leq a$. Se lee: "b es menor o igual que a"

a. Propiedades

- Si a los dos miembros de una desigualdad **se suma o resta** un mismo número, **el sentido de la desigualdad NO cambia**. Sean a, b y c números reales y $a < b$, entonces $a + c < b + c$

  Ejemplos: Como $7 > 3$, entonces, $7 + 2 > 3 + 2 \rightarrow 9 > 5$

  Como $8 > -3$, entonces, $8 - 4 > -3 - 4 \rightarrow 4 > -8$

- Si los dos miembros de una desigualdad se **multiplican o dividen** por un mismo **número positivo**, **el sentido de la desigualdad NO cambia**. *Sean a , b y c números reales tales que $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.*

  Ejemplos: Como $7 > 3$, entonces, $7 \cdot 2 > 3 \cdot 2 \rightarrow 14 > 6$

  Como $8 > -4$, entonces, $8 : 2 > -4 : 2 \rightarrow 4 > -2$

- Si los dos miembros de una desigualdad se **multiplican o dividen** por un mismo **número negativo**, el sentido de la desigualdad **SI cambia**. Sean a , b y c números reales tales que $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

  Ejemplos: Como $7 > 3$, entonces, $7 \cdot -2 > 3 \cdot -2 \rightarrow -14 < -6$

  Como $8 > -3$, entonces, $8 \cdot -4 > -3 \cdot -4 \rightarrow -32 < 12$

- Si de los dos miembros de una desigualdad, **ambos de igual signo**, se toman **inversos multiplicativos** (recíprocos), el sentido de la desigualdad **cambia**. Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$ o $a < b < 0$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

  Ejemplos: Como $2 > 1$, entonces, $\frac{1}{2} < \frac{1}{1}x$

  Como $-8 < -4$, entonces, $\frac{-1}{8} > \frac{-1}{4}$

- Si de los dos miembros de una desigualdad, **ambos de distinto signo**, se toman **inversos multiplicativos** (recíprocos), el sentido de la desigualdad **NO cambia**. Sean a y b números reales tales que $b < 0 < a$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

  Ejemplo: Como $-5 < 3$, entonces, $-\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

- Si los dos miembros de una desigualdad son **positivos** y se elevan a la misma potencia, la desigualdad **NO cambia** de sentido. Sean a, b y n números reales, con $n \geq 0$, tales que $0 < b < a$ entonces $b^n < a^n$.

  Ejemplo: Como $3 < 4$, entonces, $3^3 < 4^3 \rightarrow 27 < 64$

- Si los dos miembros de una desigualdad son **negativos** y se elevan a una potencia de grado **impar**, **NO cambia** el sentido de la desigualdad; sin embargo, si el grado de la potencia es **par**, **SI cambia** de sentido. Sean a, b, n y m números reales, con n número impar positivo y m número par positivo, tales que $b < a < 0$ entonces se cumple que $b^n < a^n$ y $a^m < b^m$

- Ejemplo: Como $-3 < -2$, entonces, $(-3)^3 < (-2)^3 \rightarrow -27 < -8$

  Como $-3 < -2$, entonces, $(-3)^2 < (-2)^2 \rightarrow 9 > 4$

Intervalos

Un intervalo real es una porción de la recta numérica definida por desigualdades. Se representan algebraicamente con paréntesis cuadrados, que se orienta hacia afuera si la desigualdad es estricta y hacia adentro si la desigualdad no es estricta, y se representan gráficamente con el achurado del intervalo, con un círculo blanco si la desigualdad es estricta y un círculo negro si la desigualdad no es estricta. Los intervalos que no están restringidos por algún lado indican que sus valores se extienden hasta el infinito positivo o al infinito negativo, representado por los símbolos ∞^-. ∞^+ Por ejemplo:

- **$x > a$** , $]a, \infty^+[$

- **$x < b$** , $]\infty^-, b[$

- **$a < x < b$** , $]a, b[$

- **$x \geq a$** , $[a, \infty^+[$

- **$x \leq b$** , $]\infty^-, b]$

- **$a < x \leq b$** , $]a, b]$

Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad de expresiones algebraicas que involucra valores desconocidos (incógnita) y valores conocidos (números o letras), donde resolverla consiste en encontrar el o los intervalos donde la desigualdad sea verdadera.

a. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Una inecuación de primer grado es una desigualdad que se puede reducir a una de las formas siguientes, con a y b, valores desconocidos y x la incógnita desconocida.

- $ax \geq b$
- $ax > b$
- $ax \leq b$
- $ax < b$

Para resolverla se debe despejar la incógnita x, teniendo en cuanta las propiedades de las desigualdades. En pocas palabras, se puede sumar, restar y dividir o multiplicar por un número positivo a ambos lados de la inecuación, sin problema, y se puede multiplicar y/o dividir por un número negativo a ambos lados de la inecuación recordando que se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

Al intentar despejar la incógnita, nos podemos encontrar con tres distintos tipos de soluciones:

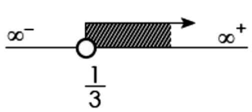
Si **$a \neq 0$**, la inecuación **tendrá intervalo solución** en el conjunto de los reales.

Ejemplo: $3x + 2 > 3$

$$3x > 3 - 2$$

$$x > \frac{1}{3}$$

Solución: $\left]\frac{1}{3}, \infty^+\right[$



Si **$a = 0$** y la desigualdad resulta verdadera, entonces la inecuación tiene **infinitas soluciones**. Conjunto de los números reales.

Ejemplo: $7x + 3 \geq -5 + 7x$

$$7x - 7x \geq -5 - 3$$

$$0 \geq -8$$

Solución: $\mathbb{R}$

Si $a = 0$ y la desigualdad resulta ser falsa, entonces la inecuación **no tiene solución**. Solución vacía.

Ejemplo: $3x + 2 \geq 1 + 3x$

$$3x - 3x \geq 1 - 2$$

$$0 \geq -1$$

Solución: Ø

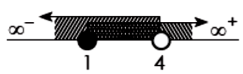
Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita es un conjunto de al menos dos inecuaciones lineales con la misma incógnita. El conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos de cada inecuación. Es decir, se deben cumplir ambas condiciones al mismo tiempo. Gráficamente corresponde a la intersección de las soluciones.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 2x+3<11 \\ 3x-4\geq -1 \end{array}\right|$

- $2x + 3 < 11$, despejando x se obtiene, $x < 4$
- $3x - 4 \geq -1$, despejando x se obtiene, $x \geq 1$

Gráficamente:

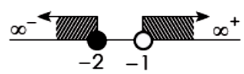


Solución: $[\,1, 4\,[$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 5x-1>-6 \\ 3-x\geq 5 \end{array}\right|$

- $5x - 1 > -6$, despejando x se obtiene, $x > -1$
- $3 - x \geq 5$, despejando x se obtiene, $x \leq -2$

Gráficamente:

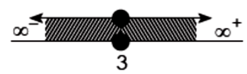


Solución: Ø

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x+5\geq 8 \\ 2x+3\leq 9 \end{array}\right|$

- $x + 5 \geq 8$, despejando x se obtiene, $x \geq 3$
- $2x + 3 \leq 9$, despejando x se obtiene, $x \leq 3$

Gráficamente:



Solución: $\{3\}$

Problemas de inecuaciones

En estos problemas aparecen expresiones que hay que traducir a los símbolos >, <, ≥ o ≤, tales como:

- "a lo menos" (≥),
- "cuando mucho" (≤),
- "como mínimo" (≥),
- "como máximo" (≤),
- "sobrepasa" (>),
- "no alcanza" (<)

Una vez planteada la inecuación o sistema de inecuaciones, se determina el conjunto solución, y al igual que en los problemas de ecuaciones hay que fijarse en la pregunta del problema.

Ecuación de 2° grado

- Una ecuación de segundo grado es un ecuación polinómica cuyo grado es 2, es decir, aquella en la que el gado mayor de los monomios es 2.

- Toda ecuación de segundo grado se puede escribir de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

En donde a, b y c son distintos de cero

- Puesto que la ecuación es de grado 2, se obtendrán 2 raíces (soluciones) distintas.

Soluciones o raíces de una ecuación cuadrática

- Las soluciones (o raíces) de la ecuación de segundo grado en la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Ejemplo: $2x^2 + 3x + 1 = 0$

Discriminante de la ecuación cuadrática

- Llamamos discriminante (Δ) de la ecuación al radicando de la fórmula anterior, es decir:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$$\downarrow$$

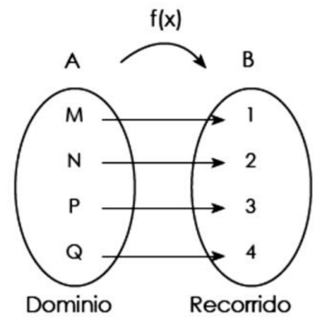
$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta = 0, \textit{la ecuación tiene una única solución} \\ \Delta > 0, \textit{la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas} \\ \Delta < 0 \textit{ la ecuacion no tiene soluciones reales} \end{array}}$$

Propiedades de las soluciones

Sean x_1, x_2 soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Funciones



Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una relación que asigna a cada elemento del conjunto A uno y sólo un elemento del conjunto B. Se expresa como, $f: A \longrightarrow B$

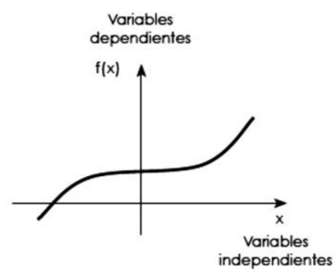
El conjunto A, representa los valores que puede tomar la función. Este conjunto lleva por nombre, **Dominio** de la función. Cada elemento del dominio recibe el nombre de **pre–imagen**.

El conjunto B, representa a los valores que toma la función. Este conjunto se llama el **Recorrido** de la función. A cada elemento del recorrido se le llama **imagen**.

En el gráfico sagital adjunto, para que la función este bien definida, se debe cumplir que de todos los elementos del conjunto de salida "A", estén asociado a solo un elemento en el conjunto de llegada "B".

Un elemento en el conjunto de llegada "B", puede estar asociado a más de un elemento en el conjunto de partida "A".

Funciones en el plano cartesiano



En el plano cartesiano, el dominio son los valores del eje de las abscisas que puede tomar la función. El recorrido son los valores del eje de las ordenadas que toma la función.

También se dice que el eje x representa las variables independientes y el eje y las variables dependientes.

Se expresa como, $f: x \longrightarrow f(x)$

y es la imagen de x mediante f (x)

x es pre–imagen de f(x)

Determinar el dominio y recorrido de una función

i. Dominio

Para **determinar el dominio de una función** $y = f(x)$ en los reales se debe tomar el conjunto real como base, descartándose aquellos valores que no pueden ser evaluados en la función, dadas las restricciones algebraicas que tenga.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$. No se considera al -2 como parte del conjunto de partida ya que en las fracciones el denominador debe ser distinto de cero.

ii. Recorrido

Para **determinar el recorrido de una función** $y = f(x)$ en los reales primero se debe encontrar la función inversa y luego, considerando esta se debe, tomando como base el conjunto $\mathbb{R}$, ir descartando aquellos valores que no pueden ser evaluados en la función, dadas las restricciones algebraicas que tenga, tal como se hace en el dominio.

Por ejemplo, en la función inversa de f(x), $f(x)^{-1} = \dfrac{3-2x}{x}$, cuyo recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$. No se considera al 0 como parte del conjunto de partida ya que en las fracciones el denominador debe ser distinto de cero.

Importante: El **Recorrido** de la función y no necesariamente coincide con el conjunto de llegada o **Codominio** (que en general corresponde al conjunto $\mathbb{R}$).

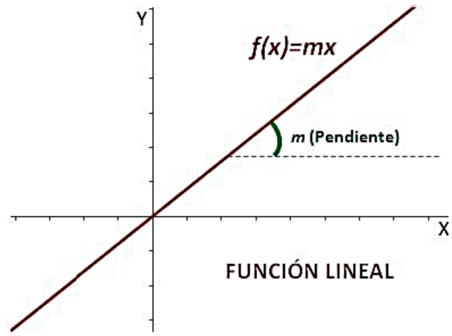
Función lineal y afín

- Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es del tipo

$$\boxed{y = mx}$$

siendo m un número cualquiera distinto de 0.

- Las características principales son:
- Su grafica es una línea recta que pasa por el origen (0,0)
- El número m se llama pendiente
- La función es creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$

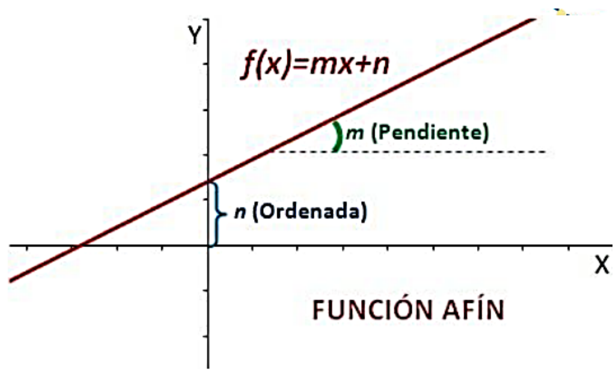


- Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica es del tipo

$$\boxed{y = mx + n}$$

siendo m y n números distintos de 0.

- Las principales características son:
- Su gráfica es una línea recta
- El numero m es la pendiente
- El numero n es el coeficiente de posición (ordenada en el origen) la recta corta al eje y en el punto (0, n)

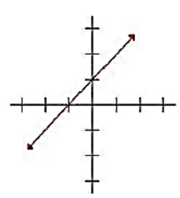
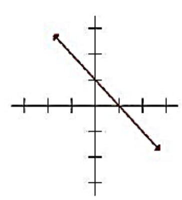
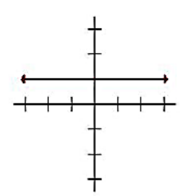


Pendiente

- Una **función lineal o afín** la pendiente se obtiene de la forma:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

- Si $m > 0$ la función es creciente
- Si $m < 0$ la función es decreciente
- Si $m = 0$ la función es constante

m > 0	m < 0	m = 0
		
Función Creciente	Función Decreciente	Función Constante

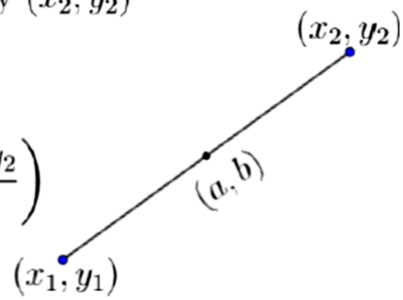
Ecuación de la recta, punto medio y distancia entre puntos

- Dado dos puntos:
  - $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

  $(3, -2)$ y $(2, 4)$

- Punto-Pendiente:
  - $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sean los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)



- Punto Medio

$$(a, b) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

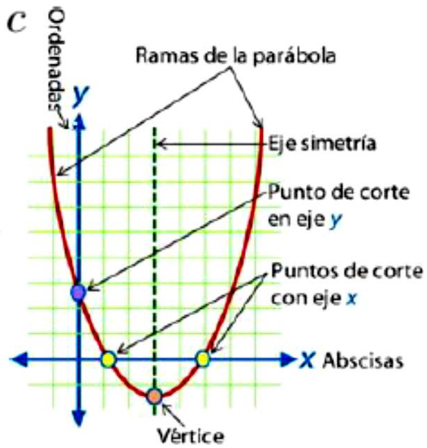
- Distancia entre puntos

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Función Cuadrática

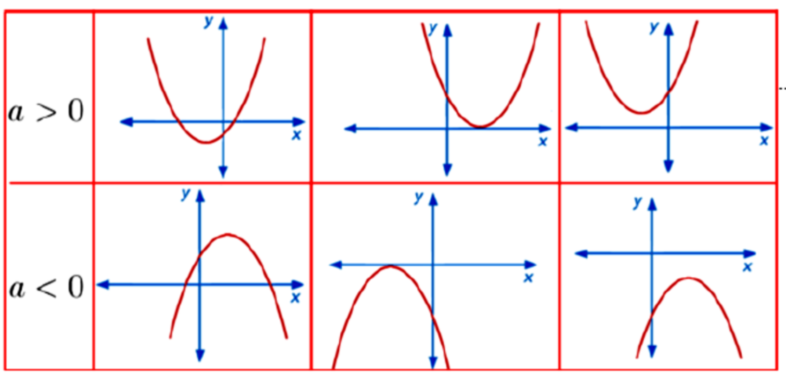
Una función cuadrática es aquella cuya expresión algebraica es: $f(x) = ax^2 + bx + c$

a, b, c números reales y $a \neq 0$



- Su gráfica es una parábola (simétrica).
- El trazado de la parábola está determinado por un vértice, por el cual se traza el eje de simetría.
- El trazado de la parábola se denomina ramas de la parábola.

Coeficientes de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

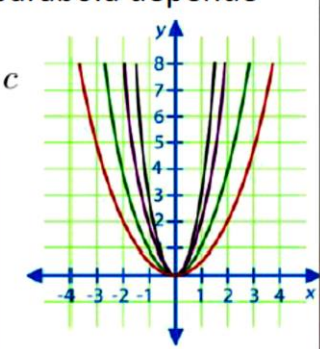


La apertura de las ramas de la parábola depende del valor de *"a"* en la función

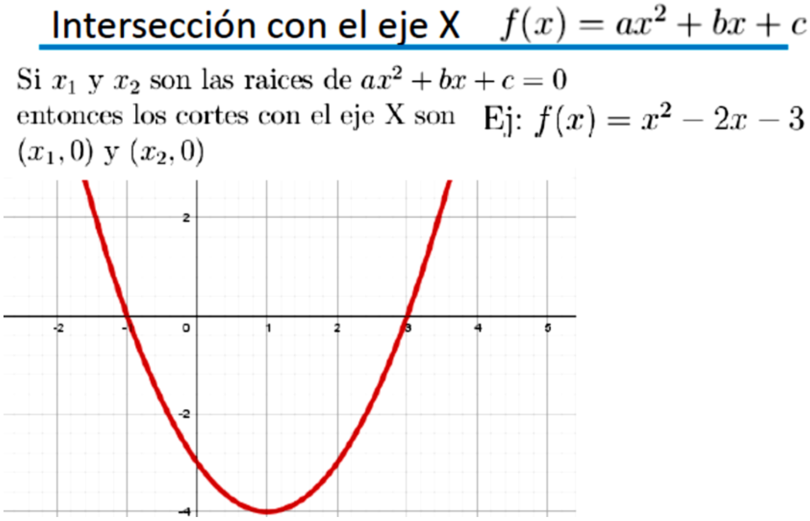
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

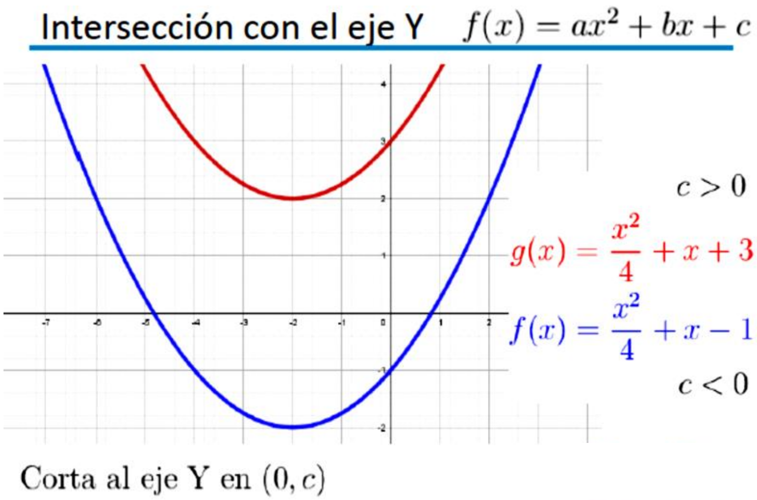
Para **$f(x) = a x^2$** si reemplazamos el coeficente **a** con diferentes valores, podemos ver como se contrae o dilata la parábola.

- **$f(x) = 0,5 x^2$**
- **$f(x) = x^2$**
- **$f(x) = 2 x^2$**
- **$f(x) = 3 x^2$**

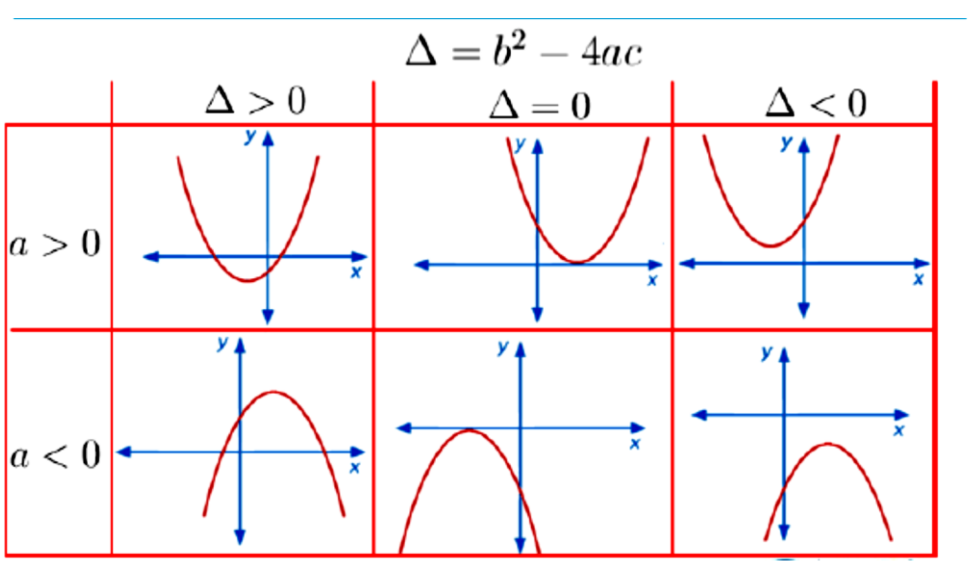


Intersecciones con los ejes





Discriminante



Eje de simetría y vértice

Sea la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2.

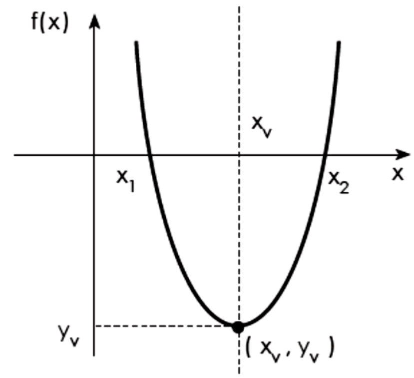
El **eje de simetría** de la parábola es una recta que divide a esta curva en dos partes congruentes. Para determinar el eje de simetría podemos hacerlo de alguna de estas dos maneras:

$$X_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{ó} \quad X_V = \frac{-b}{2a}$$

El **vértice de la parábola** es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría. El vértice se puede determinar de tres maneras:

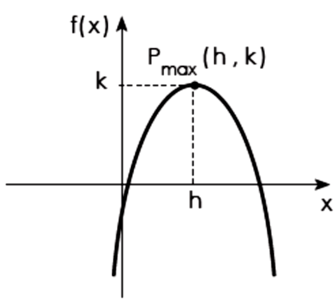
$$V = (X_V, f(X_V)) \qquad V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \;\rightarrow\; V = (h, k)$$

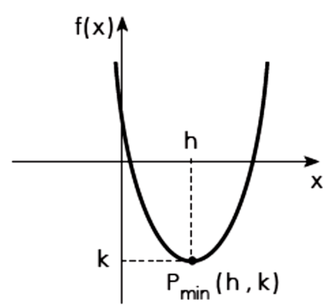


Máximo y mínimo

Si $a < 0$. En este caso, la función alcanza un valor máximo (k), cuando la variable independiente toma el valor de h.



Si $a > 0$. En este caso, la función alcanza un valor mínimo (k), cuando la variable independiente toma el valor de h.

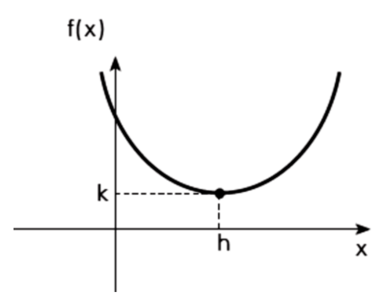


Desplazamientos

Si la función está escrita de la forma:

$$\mathbf{f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k}$$

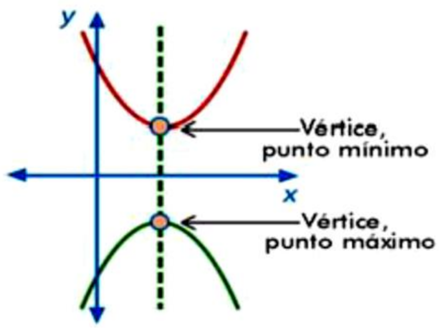
La parábola se traslada h unidades en el eje x y k unidades en el eje y, obteniéndose el nuevo vértice de coordenadas (h, k). Estos desplazamientos son respecto a una parábola con vértice en el origen.



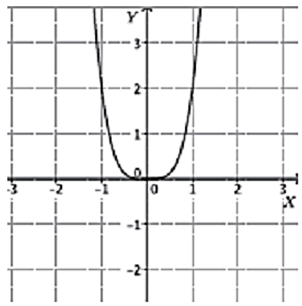
Dominio y recorrido de una función cuadrática

- El Dominio de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es: $\mathbb{R}$

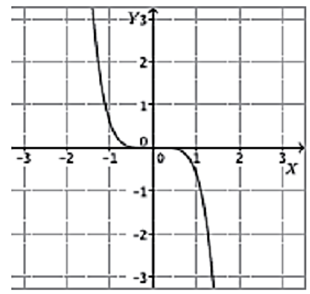
- El Recorrido de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es:
  - $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right)$ si $a > 0$
  - $\left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$ si $a < 0$



Función Potencia



$f(x) = 2x^4$



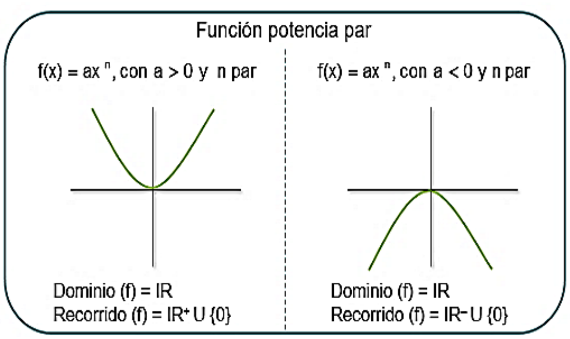
$g(x) = -\frac{3}{5}x^5$

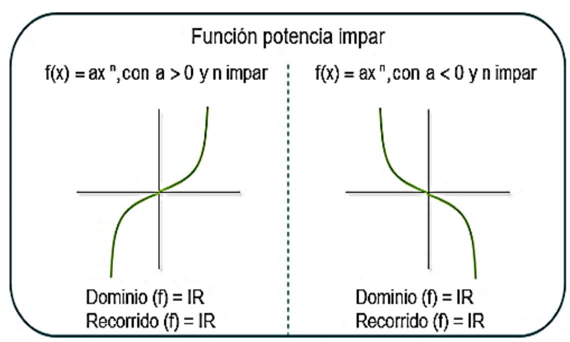
Las funciones anteriores pertenecen al tipo de función llamada **<u>función potencia</u>**. La función potencia es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^n}$ donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ son números reales distintos de 0.

Dado esto podemos indicar que en el caso de:

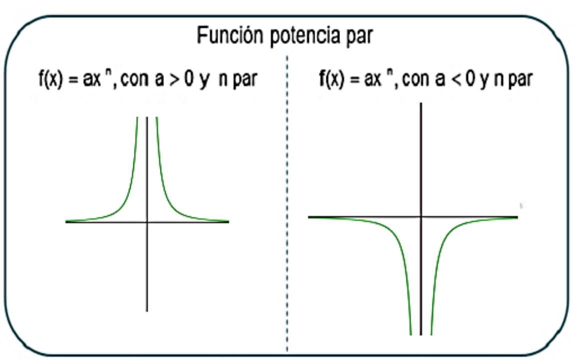
$\boldsymbol{f(x) = 2x^4}$ el valor de $\boldsymbol{a} = 2$ y el valor de $\boldsymbol{n} = 4$ (valor de la potencia).

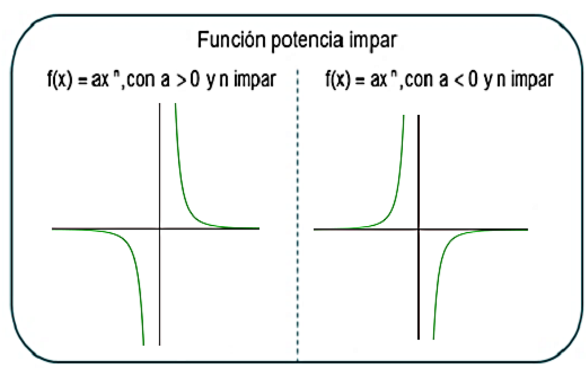
$\boldsymbol{g(x) = -\frac{3}{5}x^5}$ el valor de $\boldsymbol{a} = -\frac{3}{5}$ y el valor de $\boldsymbol{n} = 5$ (Valor de la potencia).





$f(x) = ax^n$; con **n** $\in \mathbb{Z}^-$

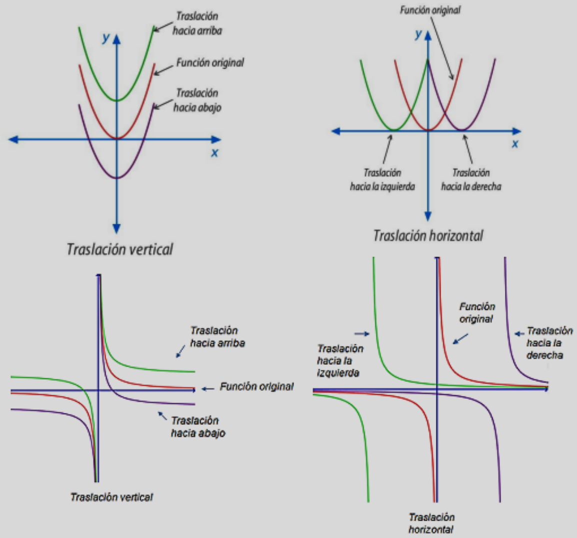




Traslación con respecto a la función potencia

Si la función es de la forma $g(x) = a(x + h)^n + k$, entonces su gráfica corresponderá a la de $f(x) = ax^n$, pero desplazada h unidades horizontalmente (a la izquierda si $h < 0$ y a la derecha si $h > 0$) y k unidades verticalmente (hacia abajo si $h < 0$ y hacia arriba si $h > 0$).

Operación sobre la función	Traslación con respecto la función potencia
$f(x) = ax^n$	Función original
$f(x) = ax^n + k$	Se traslada en forma vertical k unidades hacia arriba
$f(x) = ax^n - k$	Se traslada en forma vertical k unidades hacia abajo
$f(x) = a(x + h)^n$	Se traslada en forma horizontal h unidades hacia la izquierda
$f(x) = a(x - h)^n$	Se traslada en forma horizontal h unidades hacia la derecha



EJE ESTADÍSTCA Y PROBABILIDAD

Conceptos básicos

Población

Corresponde a un conjunto de elementos, ya sea personas, objetos, animales, etc., que portan información sobre el fenómeno en estudio. Estos elementos poseen una característica común observable o medible que se necesita para la posterior investigación.

La población se puede clasificar en dos tipos de acuerdo a su tamaño:

<u>Población Finita</u>: Cuando el número de elementos que forman la población es específico, por ejemplo, la cantidad de profesores del colsis.

<u>Población Infinita</u>: Cuando el número de elementos que forman la población es infinito, o un número tan grande que se puede considerar infinito, por ejemplo, la cantidad de tonos que pueden tener los colores.

Muestra

En la mayoría de los estudios la población es a menudo demasiado grande para poder llevar a cabo la investigación. En tal caso seleccionamos un número de elementos de la población que conforman la muestra.

Ejemplo: Si la población son los alumnos(as) del colegio, una muestra sería tomar 5 alumnos(as) por cada curso

Variable
Los elementos de la población poseen una característica o propiedad que se observa para la investigación. Aquellas características que van cambiando de expresión entre los elementos de la muestra o población se denominan variables.

Las variables se pueden clasificar en dos tipos:

Variables cuantitativas: Se expresan a través de números, por ejemplo, el promedio de notas dela enseñanza media o el número de libros que hay en la casa. Estas a la vez se subdividen en:

• Cuantitativas Discretas: Corresponde a datos que no aceptan cualquier valor sino aquellos que pertenecen a un conjunto numerable. Por ejemplo, cantidad de hermanos(as)

• Cuantitativas Continuas: Corresponde a datos que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo infinito determinado. Por ejemplo, la temperatura del día o el peso de una persona.

Variables cualitativas: Se expresan a través del nombre de un atributo, por ejemplo, la profesión o sexo de una persona. Estas a la vez se subdividen en:

• Cualitativas Nominales: Corresponde aquellos datos que solo admiten un orden alfabético. Por ejemplo, la nacionalidad o el color de piel.

• Cualitativas Ordinales: Corresponde aquellos datos que sugieren una ordenación. Por ejemplo, los meses del año.

Tablas de Frecuencias

- **Frecuencia Absoluta**: Corresponde a la cantidad de veces que aparece un dato.
- **Frecuencia Relativa**: Corresponde a la razón entre la frecuencia absoluta y el total de datos.
- **Frecuencia Absoluta Acumulada**: Corresponde al resultado de sumar a la frecuencia absoluta correspondiente las frecuencias absolutas de los datos anteriores.
- **Frecuencia Relativa Acumulada**: Corresponde al resultado de sumar a la frecuencia relativa correspondiente las frecuencias relativas de los datos anteriores.
- **Frecuencia Relativa Porcentual**: Corresponde al valor de la frecuencia relativa multiplicada por 100, por lo tanto, los valores obtenidos representan porcentajes.
- **Frecuencia Relativa Acumulada Porcentual**: Corresponde al valor de la frecuencia relativa acumulada multiplicada por 100, por lo tanto, los valores obtenidos representan porcentajes.

Marca de clase (o centro de la clase)

Es la semi suma de los límites de cada clase (intervalo). Representa a todos los datos que están contenidos en una clase.

ESTATURA (cm)	MARCA DE CLASE
118 – 126	
127 – 135	
136 – 144	
145 – 153	
154 – 162	
163 – 171	
172 - 180	

Medidas de Tendencia Central

Las medidas de tendencia central son valores numéricos que expresan el grado de centralización de los datos que representan.

Media arimética

La media aritmética, también denominada promedio, es una medida de tendencia central que solo se puede aplicar en variables cuantitativas.

La media se define como la suma de los valores de todas las observaciones divididos por el número total de datos.

Algunas ideas sobre esta medida de tendencia central son:

- No es necesario que los datos estén ordenados para calcular la media aritmética.
- Todos los datos son incluidos en el cálculo de la media aritmética.
- Un conjunto de datos solo tiene una media aritmética.
- El valor numérico puede o no coincidir con algunos de los datos del conjunto.
- Se utiliza generalmente para comparar dos o más conjuntos de datos.
- Es sensible a una distribución muy asimétrica de los datos, es decir, pierde precisión cuando hay valores extremos, muy grandes o muy pequeños, en comparación con el general de la muestra.
- Cuando se aplica en datos agrupados en intervalos, la medida pierde precisión debido a que existe una pérdida de información al agrupar los datos en clases.

A continuación mostraremos como calcular la media aritmética en distintas situaciones de acuerdo a como se nos presentan los datos:

Con miras a las compras previas a las fiestas de fin de año, el Servicio Nacional del Consumidor (SERNAC) decide realizar un sondeo para conocer el costo de una cena familiar. La muestra se tomó entre el 11 y 13 de Diciembre del 2012 y los resultados que arrojó en cuanto al precio del producto "Duraznos mitades, grado 2, Dos Caballos" en diferentes sectores de Santiago se muestran a continuación:

$$\$849 \; - \; \$856 \; - \; \$889 \; - \; \$854 \; - \; \$907$$

En esta situación se nos presentan los datos por extensión, por lo tanto, basta con sumar cada dato y dividirlo por el total de éstos para obtener la media aritmética.

$$\overline{X} = \frac{849 + 856 + 889 + 854 + 907}{5}$$
$$\overline{X} = 871$$

En base al desarrollo anterior, podemos decir que el valor promedio del producto "Duraznos mitades, grado 2, Dos Caballos" es de \$871.

De forma general, cuando se nos presentan los **datos por extensión**, el método para encontrar la media aritmética consiste en:

a) Sumar todos los datos (x_i).

b) Dividir el resultado de la suma en el total de datos (n).

De esta forma la media aritmética es:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k}{n}}$$

Una organización que promueve la vida saludable decide estudiar los kilogramos de fruta que compran 120 familias. Durante una semana se registraron los kilogramos de fruta que compraron cada familia, obteniéndose los siguientes datos tabulados:

Kilos	Familias
1	5
2	18
3	26
4	17
5	12
6	34
7	8

En esta situación nos entregan los datos tabulados con su respectiva frecuencia, por lo tanto en vez de sumar 5 veces el número uno, acudiremos a la multiplicación, de esta forma en vez de operar $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ reduciremos la expresión a $1 \cdot 5$. Al realizar lo mismo con todos los datos de la tabla obtenemos la media aritmética de la siguiente forma:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 26 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 34 + 7 \cdot 8}{5 + 18 + 26 + 17 + 12 + 34 + 8}$$

$$\overline{X} = \frac{507}{120}$$

$$\overline{X} = 4,225$$

A partir del resultado anterior podemos decir que las familias consumen $4,225$ kilogramos de fruta en promedio a la semana.

De forma general, en una **tabla de distribución de frecuencia**, el método para encontrar la media aritmética consiste en:

a) Multiplicar cada dato (x_i) por su frecuencia(f_i).

b) Sumar todos los resultados anteriores.

c) Dividir el resultado de la suma en el total de datos (n).

De esta forma la media aritmética es:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_k \cdot f_k}{n}}$$

En un hospital público se desea estudiar el tiempo de espera de los pacientes entre las 22:00 horas y las 00:00 horas. Durante un día viernes se registraron los tiempos de espera de los pacientes, obteniéndose los siguientes datos tabulados:

Tiempo [min]	Pacientes	Marca de clase
[0-30[	5	15
[30-60[	8	45
[60-90[	6	75
[90-120[	15	105
[120-150[	35	135
[150-180[	12	165
[180-210[	20	195
[210-240[	24	225
[240-270[	50	255
[270-300[	40	285

En esta situación no conocemos los datos recolectados por el hospital sino que solo conocemos los intervalos en los que estos están agrupados, por lo tanto, para calcular la media aritmética haremos uso de la marca de clase[1] debido a que éste es un valor representativo de cada intervalo.

$$\overline{X} = \frac{5\cdot 15 + 8\cdot 45 + 6\cdot 75 + 15\cdot 105 + 35\cdot 135 + 12\cdot 165 + 20\cdot 195 + 24\cdot 225 + 50\cdot 255 + 40\cdot 285}{5+8+6+15+35+12+20+24+50+40}$$

$$\overline{X} = \frac{75 + 360 + 450 + 1.575 + 4.725 + 1.980 + 3.900 + 5.400 + 12.750 + 11.400}{215}$$

$$\overline{X} = \frac{42.615}{215}$$

$$\overline{X} \approx 198,21$$

De acuerdo al cálculo anterior, el tiempo de espera promedio por los pacientes del hospital público fue de 198,21 minutos.

De forma general, en una **tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos**, el método para encontrar la media aritmética consiste en:

a) Multiplicar la marca de clase (m_i) de cada intervalo por su frecuencia(f_i).

b) Sumar todos los resultados anteriores.

c) Dividir el resultado de la suma en el total de datos (n).

De esta forma la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + \cdots + m_k \cdot f_k}{n}$$

Mediana

La mediana es una medida de tendencia central que es aplicada solo en variables cuantitativas.
La mediana se define como el valor numérico que divide a un conjunto de datos, ordenados de manera creciente o decreciente, en dos partes iguales, es decir, deja por debajo y por encima de sí el 50% de la distribución de datos.

Intervalo medial: Es el intervalo donde se encuentra la mediana

Algunas ideas sobre esta medida de tendencia central son:

- Es necesario que los datos estén ordenados para calcular la mediana.
- Un conjunto de datos sólo tiene una mediana.
- El valor numérico puede o no coincidir con algunos de los datos del conjunto.
- Es estable a los valores extremos de un conjunto de datos.

A continuación mostraremos como calcular la mediana en distintas situaciones de acuerdo a como se nos presentan los datos:

El Servicio Nacional del Consumidor (SERNAC) decide realizar un sondeo para conocer el precio del combustible líquido según sector de la Región Metropolitana. El estudio se llevo a cabo el día 31 de Diciembre del 2012 y los resultados registrados sobre el precio promedio de la gasolina de 97 octanos se presentan a continuación:

$$\$780 \;-\; \$774 \;-\; \$792 \;-\; \$771 \;-\; \$776$$

En este caso el número de datos es impar, por lo tanto, para calcular la mediana basta con ordenar los datos de forma creciente o decreciente y determinar el valor central.

$$\$771 \;-\; \$774 \;-\; \boxed{\$776} \;-\; \$780 \;-\; \$792$$

De acuerdo al desarrollo anterior, la mediana del precio de la gasolina de 97 octanos es \$776, valor que corresponde al tercer lugar (X_3) de la distribución ordenada de datos.

De forma general, cuando se nos presenta un **conjunto impar de datos discretos por extensión**, el método para encontrar la mediana consiste en:

a) Ordenar los datos de forma creciente o decreciente.
b) Localizar el valor que divide en dos partes iguales al total de datos (n).

De esta forma la mediana es el dato que ocupa el lugar:

$$M_e = X_{\frac{(n+1)}{2}}$$

El Servicio Nacional del Consumidor (SERNAC) realizó un sondeo sobre el precio del pan durante el año 2012 en la Región Metropolitana. Los registros tomados en el mes de Septiembre para 6 tipos de panes se muestran a continuación:

$$\$962 \;-\; \$912 \;-\; \$1.239 \;-\; \$1.174 \;-\; \$1.342 \;-\; \$1.325$$

En esta situación el número de datos es par, por lo tanto, para calcular la mediana tendremos que calcular el promedio entre los dos datos centrales que tengamos luego de ordenar nuestra información de forma creciente o decreciente.

$$\$912 \;-\; \$962 \;-\; \boxed{\$1.174} \;-\; \boxed{\$1.239} \;-\; \$1.325 \;-\; \$1.342$$

$$M_e = \frac{1.174 + 1.239}{2}$$
$$M_e = \frac{2.413}{2}$$
$$M_e = 1.206,5$$

De acuerdo al desarrollo anterior, la mediana del precio del pan en la Región Metropolitana es de $\$1.206,5$.

De forma general, cuando se nos presenta un **conjunto par de datos discretos por extensión**, el método para encontrar la mediana consiste en:

a) Ordenar los datos de forma creciente o decreciente.

b) Localizar los dos valores centrales ($X_{n/2}$ y $X_{(n/2)+1}$) de la distribución total de datos (n).

c) Calcular el promedio entre los dos valores encontrados anteriormente.

De esta forma la mediana es:

$$\boxed{M_e = \frac{X_{n/2}+X_{(n/2)+1}}{2}}$$

El 15 de Diciembre se realizó la corrida Nike "We run Santiago 10K 2012". El tiempo que se demoraron en recorrer los primeros 5 kilometros 72 mujeres entre 16 años y 19 años se encuentra registrado en la siguiente tabla:

Tiempo [min]	Mujeres
[20-25[	1
[25-30[	8
[30-35[	23
[35-40[	30
[40-45[	6
[45-50[	4

En una **tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos**, el método para encontrar la mediana consiste en:

a) Determinar el valor numérico de la mitad de los datos ($n/2$)

b) Localizar el intervalo en el cuál esta contenido ese valor.

c) Sustituir los siguientes valores:

- n =Número de observaciones.
- a =Amplitud del intervalo seleccionado.
- L_i =Límite inferior del intervalo seleccionado.
- f_i =Frecuencia absoluta del intervalo seleccionado.
- F_i =Frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a la clase que contiene a la mediana.

En la expresión:

$$M_e = L_i + a \cdot \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - F_i}{f_i} \right]$$

En esta situación tenemos un total de 72 mujeres. Para saber en qué intervalo esta nuestra mediana dividimos el total de datos en 2:

$$\frac{72}{2} = 36$$

De acuerdo a lo anterior, nuestra mediana corresponde al dato número 36, que está ubicado de la clase $[35 - 40[$.

Luego de tener nuestro intervalo identificado, determinamos los valores numéricos de los datos necesarios para obtener la mediana:

- $n = 72$
- $a = 40 - 35 = 5$
- $L_i = 35$
- $f_i = 30$
- $F_i = 1 + 8 + 23 = 32$

Finalmente sustituimos en la expresión:

$$M_e = L_i + a \cdot \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - F_i}{f_i} \right]$$

$$M_e = 35 + 5 \cdot \left[\frac{\left(\frac{72}{2}\right) - 32}{30} \right]$$

$$M_e = 35 + 5 \cdot \left[\frac{4}{30} \right]$$

$$M_e = 35 + \frac{2}{3}$$

$$M_e = \frac{107}{3}$$

$$M_e \approx 35,67$$

La mediana de las mujeres que corrieron el evento “We run Santiago 10K 2012” es de 35,67 minutos.

Moda

La moda es una medida de tendencia central que es aplicada en variables cuantitativas y variables cualitativas.
La moda se define como el dato que posee mayor frecuencia absoluta, es decir, el valor que más se repite.

Intervalo modal: Es el intervalo que tiene la mayor frecuencia absoluta

- Bimodal: La muestra posee dos modas
- Trimodal: La muestra posee tres modas
- Polimodal: La muestra posee desde cuatro modas en adelante
- Amodal: La muestra no posee moda

Algunas ideas sobre esta medida de tendencia central son:

- No es necesario que los datos estén ordenados para calcular la moda.
- Un conjunto de datos puede tener más de una moda o puede que este presente.
- El valor numérico coincide con algún dato del conjunto.

El 15 de Diciembre se realizó la corrida Nike "We run Santiago 10K 2012". El tiempo que se demoraron en realizar la corrida los 30 participantes hombres entre 60 años y 64 años se encuentran registrados en la siguiente tabla:

Tiempo [min]	Hombres
[40-50[	2
[50-60[	10
[60-70[	13
[70-80[	4
[80-90[	1

Al presentarnos la información a través de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, se acepta como válido que la moda corresponda a la marca de clase del intervalo que posea mayor frecuencia absoluta.

a) Localizar el intervalo que posee mayor frecuencia absoluta.
b) Sustituir los siguientes valores:
- a =Amplitud del intervalo seleccionado.
- L_i =Límite inferior del intervalo seleccionado.
- f_i =Frecuencia absoluta del intervalo seleccionado.
- f_{i+1} =Frecuencia absoluta de la clase siguiente al intervalo seleccionado.
- f_{i-1} =Frecuencia absoluta de la clase anterior al intervalo seleccionado.

En la expresión:

$$M_o = L_i + a \cdot \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right]$$

En esta situación el intervalo con mayor frecuencia es $[60-70[$, por lo tanto, los datos serían:

- $a = 70 - 60 = 10$
- $L_i = 60$
- $f_i = 13$
- $f_{i+1} = 4$
- $f_{i-1} = 10$

Al sustituir en la expresión antes mencionada tenemos:

$$
\begin{aligned}
M_o &= L_i + a \cdot \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right] \\
M_o &= 60 + 10 \cdot \left[\frac{13 - 10}{(13 - 10) + (13 - 4)}\right] \\
M_o &= 60 + 10 \cdot \frac{1}{4} \\
M_o &= 60 + \frac{5}{2} \\
M_o &= 60 + \frac{5}{2} \\
M_o &= \frac{125}{2} \\
M_o &= 62,5
\end{aligned}
$$

Medidas de posición

Las medidas de posición relativa se llaman en general cuantiles y se pueden clasificar en cuatro grandes grupos:

•Cuartiles, Quintiles, Deciles, Percentiles

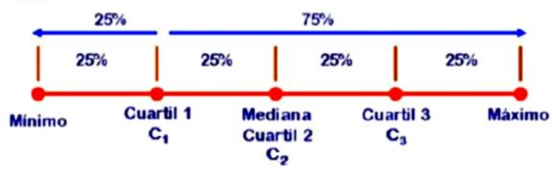
Estas últimas dividen a una distribución ordenada en partes iguales. Para calcular las medidas necesitamos los datos ordenados de menor a mayor.

Cuartiles

Los cuartiles son los tres valores que dividen a un conjunto de datos en cuatro partes iguales. C_1, C_2, C_3 determinan los valores correspondientes al 25%, al 50% y al 75% de los datos. C_2 COINCIDE CON LA MEDIANA.

n=cant. datos

$$\boxed{C_k = \frac{k \cdot n}{4}}$$

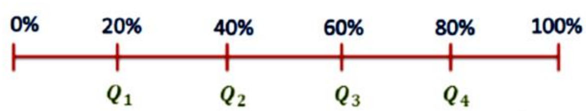


Quintiles

Los quintiles son los cuatro valores que dividen a los datos ordenados en cinco partes iguales. Los quintiles dan los valores correspondientes al 20%, 40%, 60%, 80% de los datos.

n=cant. datos

$$\boxed{Q_k = \frac{k \cdot n}{5}}$$

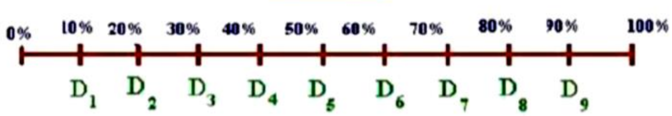


Deciles

Los deciles son los nueve valores que dividen a los datos ordenados en diez partes iguales. Los deciles dan los valores correspondientes al 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% de los datos. D_5 COINCIDE CON LA MEDIANA.

n=cant. datos

$$\boxed{D_k = \frac{k \cdot n}{10}}$$



Percentiles

Los percentiles son los 99 valores que dividen a los datos ordenados en 100 partes iguales. Los percentiles dan los valores correspondientes al 1%, 2%, 3%, … , 97%, 98%, 99% de los datos.

P_{50} COINCIDE CON LA MEDIANA.

n=cant. datos

$$\boxed{P_k = \frac{k \cdot n}{100}}$$

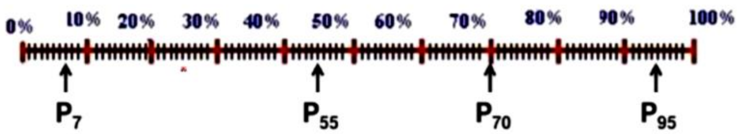
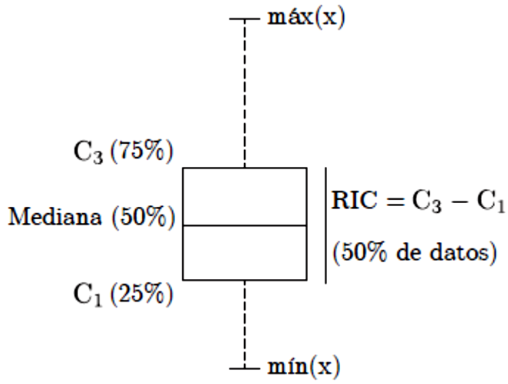


Diagrama de caja

Para representar los cuartiles de un conjunto de datos ordenados, se utilizan los llamados **diagramas de caja**, como el que se muestra a continuación:



Donde RIC corresponde al rango intercuartil. A través de este gráfico es posible visualizar el conjunto de datos que se está estudiando y su distribución según las medidas de posición. En los extremos del gráfico se encuentran los valores mínimo y máximo del conjunto y los tres segmentos paralelos de la caja representan a cada cuartil. Cuando la distribución es simétrica, la mediana (segmento central en la caja) se ubica justo en el medio de la figura.

Podemos apreciar que dentro de la caja (desde C_1 hasta C_3) se encuentra el 50 % de la información.

Medidas de Dispersión

El promedio (media aritmética) es un indicador sensible a los valores extremos. En otras palabras, la media puede resultar no representativa en presencia de datos cuyos valores sean mucho mayores o mucho menores que la mayoría de ellos.

Entonces las medidas de dispersión tratan, a través del cálculo de diferentes fórmulas, de arrojar un valor numérico que ofrezca información sobre el grado de variabilidad de una variable o el grado de confianza de un promedio

Rango

El rango se define como la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de un conjunto. Se designa con la letra R.

Desviación

Es la diferencia entre el valor de un elemento del conjunto de datos y el promedio de estos

Desviación media

La desviación media de un conjunto de datos se define como el promedio de las distancias de cada uno de los datos a su media aritmética. Se representa por $\mathrm{D_m}$ y matemáticamente se calcula mediante:

$$\mathrm{D_m} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |x_i - \overline{x}|}{\mathrm{N}}$$

Donde $\overline{x}$ corresponde al promedio de los N datos $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ que conforman el conjunto.

Varianza

Otra forma de cuantificar y poder así comparar la dispersión entre dos o más conjuntos de datos es mediante la varianza, la cual se define como el promedio de las distancias al cuadrado entre los datos y su media aritmética respectiva. Se representa por σ^2 o por s^2 y matemáticamente se calcula mediante:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - \overline{x})^2}{\mathrm{N}}$$

Conceptualmente, la varianza es exactamente igual a la desviación media. La diferencia radica en la precisión de la escala de medición que se ocupa. Por lo tanto, a mayor varianza, mayor dispersión de los datos. Al contrario, a menor varianza, más homogéneos son.

A diferencia del rango o de la desviación media, la varianza se expresa en unidades cuadradas: la varianza del problema inicial se expresa en grados Celsius cuadrados ($^\circ\mathrm{C}^2$). Puesto que esta unidad de medida resulta poco usual (y por tanto poco comprensible), se define la desviación estándar (o desviación típica) como la raíz cuadrada de la varianza, de modo que la unidad de medida sea la misma que la de los datos del conjunto.

Desviación estándar (o desviación típica)

Como se enunció previamente, se define la desviación estándar (o desviación típica) de un conjunto de datos como la raíz cuadrada de la varianza. Como consecuencia, su unidad de medida es la misma que la de los datos del conjunto. Se representa por σ o s y matemáticamente se calcula mediante:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

Conceptualmente, la varianza y la desviación estándar son equivalentes, con la diferencia de sus unidades de medida. Por lo tanto, a mayor desviación estándar, mayor dispersión de los datos. Al contrario, a menor desviación estándar, más homogéneos son.

Tres propiedades importantes referidas a la varianza y la desviación estándar se desprenden de su definición:

- *La varianza (y por tanto la desviación estándar) toma valores mayores o iguales a cero.*
- *Si a cada uno de los elementos de un conjunto se les suma un número, la varianza no se altera (por lo tanto la desviación estándar tampoco).*
- *Si cada uno de los elementos de un conjunto se multiplica por un número, la varianza queda multiplicada por el cuadrado de dicho número, mientras que la desviación estándar queda multiplicada por él.*

Probabilidad

Experimento: Un experimento es una acción o proceso que produce un resultado. A continuación, describiremos distintos tipos de experimentos

- **Experimento Determinista**: Consiste en aquellos experimentos que al repetirlos bajo las mismas condiciones iniciales se obtiene siempre el mismo resultado. Debido a lo anterior el experimento tiene un resultado único que se puede predecir sin la necesidad de realizar la acción. Por ejemplo, si medimos el tiempo que demora en caer una bolita de 2[kg] y luego repetimos el experimento con las mismas condiciones iniciales, en ambos casos obtendremos el mismo tiempo de caída.

- **Experimento Aleatorio**: Consiste en aquellos experimentos que al repetirlos bajo las mismas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Debido a lo anterior el experimento tiene múltiples resultados que dependen del azar. Por ejemplo, al lanzar una moneda podemos obtener sello y luego al lanzarla bajo las mismas condiciones podemos obtener cara, es decir, nadie está seguro del resultado.

- **Experimento Equiprobable**: Consiste en aquellos experimentos en los que todos los resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir. Por ejemplo, si se lanza un dado común no cargado todas las caras tienen la misma posibilidad de salir.

- **Experimento No Equiprobable**: Consiste en aquellos experimentos en los que algunos de los resultados tienen mayores posibilidades de ocurrir que otros. Por ejemplo, si se desea sacar una ficha de una caja con 20 fichas rojas y 30 fichas azules, todas del mismo porte y peso, hay mayor posibilidad de obtener una ficha azul que una roja.

Espacio Muestral

El espacio muestral lo denotaremos con la letra Ω y corresponde al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Observemos los siguientes espacios muestrales:

- Lanzamiento de una moneda:

$$\Omega_{moneda} = \{cara, sello\}$$

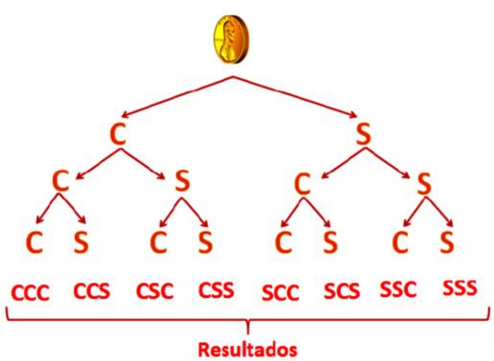
- Lanzamiento de un dado:

$$\Omega_{dado} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Diagrama de árbol

Calcular la probabilidad de obtener al menos un sello al lanzar 3 veces una moneda común.

Solución: El diagrama de árbol para este ejercicio es:



Triangulo de Pascal

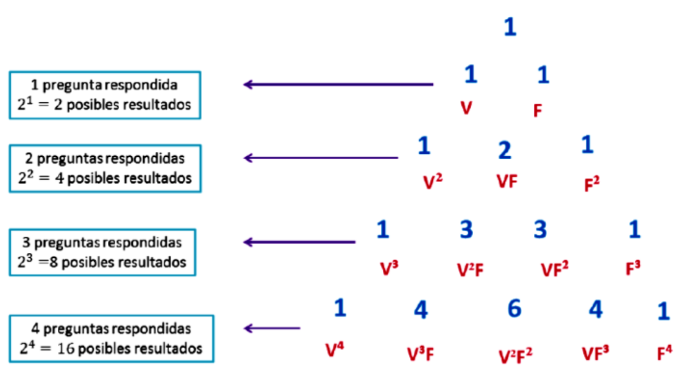
El triángulo de Pascal representa una regularidad numérica que se muestra a continuación:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋰ ⋱

Este triángulo se construye a partir del número 1, siendo los coeficientes de los extremos que siguen también números unos, pero los valores céntricos corresponden aquellos valores que se obtienen de la suma de los dos números en la fila superior, de manera que se va formando una figura triangular.

Determinar el número de casos en que un estudiante responde 2 preguntas verdaderas y 2 falsas al responder un examen de 4 preguntas de verdadero o falso al azar.

Solución: Lo primero que tenemos que darnos cuenta es que el experimento de responder una pregunta al azar con verdadero o falso corresponde a un experimento aleatorio sencillo con dos sucesos equiprobables, en éste caso responder verdadero o responder falso tienen una probabilidad de un 50 % cada una. Como tenemos que iterar el expeirmento 4 veces, ya que el examen tiene esa cantidad de preguntas, utilizaremos el triángulo de Pascal.



Evento o Suceso

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que pueden resultar de un experimento aleatorio. Se destacan dos tipos de sucesos de acuerdo a la probabilidad que tienen:

- Suceso Imposible: Es aquel resultado que tiene probabilidad 0 ó 0% y que, por lo tanto, nunca ocurre. Por ejemplo, cuando se desea obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común.

- Suceso Seguro: Es aquel resultado que tiene probabilidad 1 ó 100% y que, por lo tanto, siempre ocurre. Por ejemplo, cuando se desea sacar una carta roja de una baraja inglesa que posee sólo cartas de corazón y diamante.

- Suceso Posible: Es aquel resultado que se encuentra entre 0 y 1 ó 1% y 100% y que, por lo tanto, tiene la posibilidad de ocurrir. Por ejemplo, cuando se lanza una dado, salga un número primo

Guía de Regla de la adición

Sucesos excluyentes: Son dos resultados de un experimento que no pueden ocurrir al mismo tiempo. (o son sucesos que no tienen elementos en común)

*Si A y B son sucesos excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B está dada por

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejemplo: En una caja hay 4 bolitas azules, 3 bolitas rojas y 2 blancas. Al sacar una bolita, calcula las siguientes probabilidades

A) Sea azul o roja
B) Sea roja o blanca
C) Sea roja o blanca o azul
D) Sea azul o negra

Sucesos no excluyentes: Son todos aquellos sucesos que tienen la capacidad de ocurrir de manera simultánea en una experimentación. La ocurrencia de alguno de ellos no supone la no ocurrencia del otro. (o son suceso que tienen elementos en común)

*Si A y B son sucesos no excluyentes, la probabilidad de que ocurra A o B está dada por

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo: De una baraja de naipe inglés. Al sacar una carta, calcula las siguientes probabilidades

A) Sea corazón o un as
B) Sea 8 o negra
C) Sea Kaiser o diamante
D) Sea figura o roja

Probabilidad de sucesos complementarios

En algunas situaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra la negación de un suceso, en este caso calculamos la probabilidad de la afirmación del suceso y se lo restamos a la unidad. Cabe destacar que si tenemos un suceso A y su negativo $\overline{A}$, entonces se dice que ambos sucesos son **complementarios** y la suma de sus probabilidades es igual a 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Si el suceso $\overline{A}$ es la negación del suceso A,entonces la probabilidad de que ocurra el suceso $\overline{A}$ es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Regla de la multiplicación

Sucesos independientes: Se dice que dos sucesos aleatorios son independientes entre sí cuando la probabilidad de cada uno de ellos no está influida porque el otro suceso ocurra o no, es decir, cuando ambos sucesos no están relacionados.

Ejemplo: Sacamos una carta de una baraja, la miramos y la introducimos de nuevo (se devuelve) en la baraja. Barajamos y sacamos una segunda carta. Los sucesos "sacar la primera carta" y "sacar la segunda carta" **son independientes**, pues no influye para nada lo que hayamos obtenido en la primera carta.

La regla de la multiplicación de probabilidades para sucesos independientes se aplica en la intersección de dos sucesos

Si A y B son sucesos independientes, la probabilidad de que ocurran A y B está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplos: De una caja con 3 bolitas rojas, 4 verdes, 2 azules y 1 negra. Se define los siguientes sucesos sacar una bolita se observa para luego devolverla y se saca otra bolita se observa y se devuelve. Calcula las siguientes probabilidades

a) La primera bolita sea verde y la segunda bolita sea roja

b) La primera bolita sea azul y la segunda bolita sea roja

c) La primera bolita sea negra y la segunda bolita sea verde

d) La primera bolita sea verde y la segunda bolita sea azul

e) La primera bolita sea negra y la segunda bolita sea roja

Sucesos Dependientes

Dos sucesos son dependientes entre sí cuando el hecho de que ocurra uno de ellos influye en la probabilidad de que ocurra el otro

Si A y B son sucesos dependientes, la probabilidad de que ambos ocurran está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Donde **P(B/A)** es la probabilidad de que ocurra B, luego de ocurrido el suceso A

Ejemplo 1: Se tiene una urna con 5 bolitas rojas, 3 verdes, 2 azules y 2 amarillas. Se tienen que sacar 2 bolitas una después de la otra, sin reposición. Determine las siguientes probabilidades

a) La primera roja y la segunda verde

b) La primera amarilla y la segunda azul

c) La primera amarilla y la segunda azul

d) La primera roja y la segunda roja

Probabilidad Condicionada

En algunos problemas, puede que sea necesario calcular la probabilidad de que ocurra el evento B, dado que ha ocurrido A. En ese caso, simplemente invertimos el orden de las variables:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Donde **P(B/A)** es la probabilidad de que ocurra B, luego de ocurrido el suceso A

La siguiente tabla muestra a los trabajadores de una empresa separados por hombres y mujeres además de como llegan al trabajo

	AUTO	TRANSPORTE	TOTAL
HOMBRE	**10**	**15**	**25**
MUJER	**15**	**20**	**35**
TOTAL	**25**	**35**	**60**

A) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona al azar que llegue en transporte público sabiendo que es mujer?
B) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona al azar que llegue en auto sabiendo que es hombre?
C) Sabiendo que llega en auto, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Técnicas de Conteo

FACTORIALES

Definición: Sea n un número natural. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. La expresión **n!** se lee, n factorial. Es así que:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Propiedades

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $x! = n! \longrightarrow x = n$
- $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
- $\frac{n!}{(n-1)!} = n$

NOTA:

Algunos factoriales son:

» $0! = 1$

» $1! = 1$

» $2! = 1 \cdot 2 = 2$

» $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

» $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

» $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

a. Principio Multiplicativo

Si un suceso ocurre de n_1 maneras diferentes, el segundo de n_2 maneras diferentes y así sucesivamente hasta la última alternativa que puede realizarse de n_k maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre el suceso está dado por $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$

Ejemplo:

Si tengo tres camisas y cuatro corbatas. ¿De cuantas maneras distintas puedo combinar una camisa y una corbata?. La respuesta a esta pregunta es de 12 maneras diferentes $(3 \cdot 4)$

b. Principio Aditivo

Si un suceso tiene formas alternativas de llevarse a cabo, donde la primera de esas alternativas puede realizarse de m_1 maneras, la segunda alternativa puede realizarse de m_2 maneras, y así sucesivamente, hasta la última que puede realizarse de m_k maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre este suceso es $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k$

Ejemplo:

Si me quiero comprar un auto, puedo elegir entre distintas marcas y modelos. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De entre cuantas combinaciones de autos puedo elegir?. La respuesta a esta pregunta es de 26 maneras diferentes $(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5)$.

Permutación

Una permutación es cuando utilizamos todos los elementos del conjunto y los ordenamos de distintas formas.

a. Permutación simple

El número de **permutaciones** de n elementos está dado por:

$$P(n) = n!$$

Ejemplo:

¿Cuantas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "GENIAL" ?

Respuesta:

$P(n) = n! \rightarrow P(6) = 6! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ palabras.

b. Permutación circular

El número de **permutaciones circulares** de n elementos está dado por:

$$P\varnothing(n) = (n-1)!$$

Ejemplo:

¿Cuantas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "GENIAL", cuando no importa desde que letra comenzamos a leer la palabra. Es decir, cuando por ejemplo GENIAL y LGENIA, ambas se lean de igual modo.

Respuesta:

$P\varnothing(n) = (n-1)!$

$P\varnothing(6) = (6-1)! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ palabras.

c. Permutación con elementos repetidos

El número de **permutaciones** de n elementos, cuando hay **elementos repetidos**, está dado por:

$$P^n_r = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot r!}$$

Ejemplo:

¿Cuantas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "MORALEJA" ?

Respuesta:

$P^n_r = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot r!} \rightarrow P^8_2 = \frac{8!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

= 20.160 palabras.

Variación

Variación sin repetición

Una **variación** es el proceso de encontrar cuantos grupos diferentes se pueden formar con n elementos de modo que cada grupo tenga r elementos. La variación se diferencia de la permutación, ya que aquí no utilizamos todos los elementos.

La variación de n elementos tomados de r en r está dado por: $V^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo:

¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra "MARDONES"?

Respuesta: $V^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow V^8_3 = \frac{8!}{(8-3)!} \rightarrow$

$\frac{8!}{5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336$ palabras.

Variación con repetición

Sea A un conjunto con m elementos. Llamamos variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m a todas a las agrupaciones que podemos hacer con m elementos de A independientemente de que se repita alguno.

El número de variaciones con repetición viene dado por: $VR_{n,m} = n^m$

$VR^n_r = n^r$

Ejemplo

¿Cuántos números de 8 cifras que empiecen por 6 se pueden formar?

Si los números empiezan por 6 sólo queda determinar qué ocurre con las siete últimas cifras que puede cualquier dígito.

$VR_{10,7} = 10^7$

Se Podrán formar 10.000.000 números.

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Una **combinación** es el proceso de encontrar la cantidad de grupos que se pueden formar con n elementos de modo que cada grupo tenga r elementos, no interesando el orden de estos. El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r está dado por:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Ejemplo:

¿Cuántas combinaciones de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra "MARDONES"?

Respuesta: $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \rightarrow C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} \rightarrow$

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{3!}} = 7 \cdot 8 = 52 \text{ palabras.}$$

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k son los diferentes grupos de k elementos que se pueden formar a partir de estos n elementos, permitiendo que los elementos se repitan, y considerando que dos grupos se diferencian solamente si tienen elementos diferentes (es decir, no importa el orden). Se representan por CRn,k .

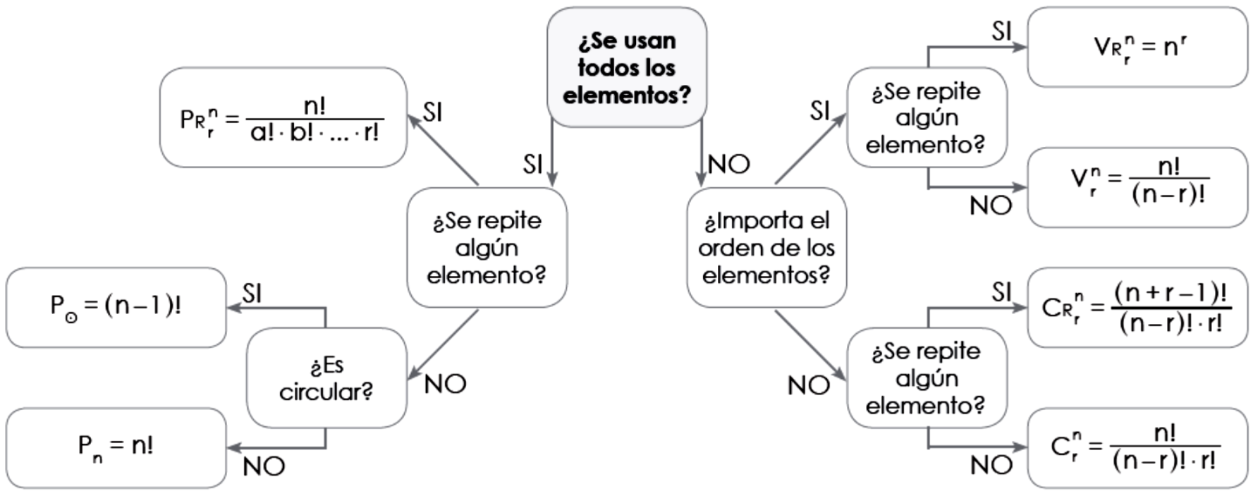
$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Ejemplo

Se quiere saber cuántas combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3 hay, usando la fórmula se obtiene que son 35:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \frac{(5+3-1)!}{(5-1)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

CUADRO RESUMEN



Variable Aleatoria

- Una variable aleatoria es una función que asocia a cada resultado de espacio muestral un número real.
- La variable aleatoria puede ser discreta o continua.
- La variable aleatoria es discreta si el conjunto de valores que toma es un conjunto numerable, es decir, que solo puede tomar valores concreto. Dicho conjunto lo denotaremos por: $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

Ej: X=número de pasajeros que viajan en un taxi

Función de Probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores . Se define la función de probabilidad de X como: $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \text{ con } i \geq 1$

Ej: Sea el experimento de lanzar 2 veces un dado y se define la v.a. X la cantidad de pares obtenidos:

Propiedades de Función de Probabilidad

Las propiedades fundamentales de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X que toma valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ son:

- $\mathbb{P}(X = x_i) > 0, \text{ con } i \geq 1$
- $\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3) + \ldots + \mathbb{P}(X = x_n) = 1$

Función de Distribución Acumulada

Sea X una V.A.D. que toma los valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, Se define la función de distribución de X como:

$$\boxed{F(x) = P[X \leq x_i] = \sum_{x_i < x} P[X = x_i]}$$

Se define X=cantidad de pares obtenidos al lanzar dos dados: ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo mas 1 par?

Valor Esperado o Esperanza

El valor esperado de una variable aleatoria discreta X que toma los valores $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, está dada por:

$$\boxed{E(X) = x_1 P[X = x_1] + x_2 P[X = x_2] + \cdots + x_n P[X = x_n]}$$

Ej: X="Número de caras obtenidas al lanzar dos monedas". El valor esperado de X es:

Distribución Binomial

Un experimento seguirá una distribución de probabilidad binomial si:

- En cada evento son posibles solo dos resultados (éxito o fracaso).
- La probabilidad de éxito se mantiene constante a lo largo del experimento.
- Cada evento es independiente de los anteriores.

a. Función de probabilidad binomial

La distribución binomial se representa por B(n , p), siendo n el número de pruebas o repeticiones del experimento, p es la probabilidad de éxito, (1 – p) la probabilidad de fracaso y x el valor de la variable X.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x} \qquad \text{Recordar que: } \binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$$

Función de distribución acumulada de la distribución binomial

$$P(X \leq xi) = \binom{n}{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{x_i} \cdot p^{xi} \cdot (1-p)^{n-xi}$$

Ejemplo 1:

Una familia planea tener 5 hijos, ¿cuál es la probabilidad que tengan 2 hombres?

1° Paso: Definir la variable aleatoria y el valor que debe tomar: X es el número de hombres que tendrá el matrimonio, P(X = 2).

2° Paso: Número de pruebas: n = 5

3° Paso: Identificar la probabilidad de éxito: la probabilidad que sea hombre es p = 0,5.

4° Paso: Evaluar en la función:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0{,}5)^{2} \cdot (1-0{,}5)^{5-2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot (0{,}5)^{2} \cdot (0{,}5)^{3} = \frac{5}{24}$$

∴ La probabilidad de que el matrimonio de los 5 hijos 2 sean hombres es de un $20{,}8\overline{3}\%$

Ejemplo 2:

Una familia planea tener 5 hijos, ¿cuál es la probabilidad que tengan 3 hombres o menos?

1° Paso: Definir la variable aleatoria y el valor que debe tomar: X es el número de hombres que tendrá el matrimonio, P(X ≤ 3).

2° Paso: Número de pruebas: n = 5

3° Paso: Identificar la probabilidad de éxito: la probabilidad que sea hombre es p = 0,5.

4° Paso: Evaluar en la función:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X \leq 3) = \binom{5}{0} \cdot (0{,}5)^{0} \cdot (0{,}5)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot (0{,}5)^{1} \cdot (0{,}5)^{5-1} + \binom{5}{2} \cdot (0{,}5)^{2} \cdot (0{,}5)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot (0{,}5)^{3} \cdot (0{,}5)^{5-3}$$

$$P(X \leq 3) = \frac{5!}{(5-0)! \cdot 0!} \cdot (0{,}5)^{0} \cdot (0{,}5)^{5} + \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} \cdot (0{,}5)^{1} \cdot (0{,}5)^{4} + \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot (0{,}5)^{2} \cdot (0{,}5)^{3} + \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot (0{,}5)^{3} \cdot (0{,}5)^{2}$$

∴ La probabilidad de que el matrimonio de los 5 hijos 3 o menos sean hombres es de un 81,25%

$$P(X \leq 3) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{32} = 0{,}8125$$

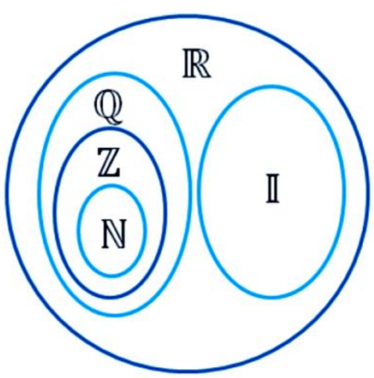
c. Esperanza y varianza de la distribución binomial

$$E(X) = n \cdot p \quad ; \quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

EJE NÚMEROS

Números Reales

En forma gráfica los conjuntos que hemos estudiados quedan representando como se muestra a continuación:



Aproximaciones

i. Aproximación por defecto y exceso

A veces necesitaremos trabajar con números con una gran cantidad de cifras decimales, como por ejemplo los números periódicos, y por tanto en ocasiones será necesario aproximarlos. Las aproximaciones que resultan menores que el valor del número inicial se llaman **aproximaciones por defecto** y las que resultan mayores se llaman por **aproximaciones por exceso**.

Para aproximar por defecto:

Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere aproximar.

Paso 2: Considerar las cifras decimales hasta la posición que se determinó.

Ejemplo:

- Aproximar por defecto a la décima el número $3,\underline{4}7$ $\rightarrow$ 3,4

Para aproximar por exceso:

Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere aproximar.

Paso 2: La cifra por aproximar se debe aumentar en una unidad.

Ejemplo:

- Aproximar por exceso a la unidad el número $1\underline{5},28$ $\rightarrow$ 16

Ejemplo:

Si aproximamos a la milésima el número 3,14159 por exceso y por defecto resulta:

ii. Truncar y redondear

Un número real puede ser aproximado por **truncamiento** o por **redondeo**.

Para truncar:

Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere truncar.

Paso 2: Considerar las cifras decimales hasta la posición que se determinó.

Nota: Truncar es equivalente a aproximar por defecto.

Ejemplo:

- Truncar a la centésima el número $3{,}1\underline{4}21$
  $\rightarrow 3{,}14$
- Truncar a la milésima el número $1{,}86\underline{7}6$
  $\rightarrow 1{,}867$

Para redondear:

Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere redondear.

Paso 2: Considerar la cifra decimal inmediatamente siguiente a la que determine la aproximación.

Paso 3: Si dicha cifra es menor que 5, no hay modificaciones en las cifras que se conservan. Si dicha cifra es mayor o igual que 5, la cifra por aproximar se debe aumentar en una unidad.

Ejemplo:

- Redondear a la centésima el número $3{,}1\underline{4}21$
  $\rightarrow 3{,}14$
- Redondear a la milésima el número $1{,}86\underline{7}6$
  $\rightarrow 1{,}868$

Números decimales

Al efectuar la división entre el numerador y el denominador de una fracción, se obtiene un número decimal. Un número decimal se compone de dos partes, la primera corresponde a la parte entera y la segunda corresponde a su parte decimal.

a. Tipos de números decimales

i. Decimal finito

Un **decimal finito** es aquel que tiene un número determinado (finito) de dígitos.

Ejemplo: 0,25 → dos cifras decimales.

ii. Decimal infinito periódico:

Un **decimal infinito periódico** es aquel que tiene un número indeterminado (infinito) de dígitos y se repite una o más cifras de manera periódica, el que puede escribirse con punto suspensivo o con una barra sobre los dígitos periódicos.

Ejemplo: $1{,}\overline{63} = 1{,}636363\ldots$ → período “63”.

iii. Decimal infinito semi-periódico:

Un **decimal infinito semi-periódico** es aquel que tiene un número indeterminado (infinito) de dígitos y se repite una o más cifras de manera periódica, el que puede escribirse con punto suspensivo o con una barra sobre los dígitos periódicos. Además se distingue antes del periodo una parte de cifras que no se repiten llamada ante-periodo.

Ejemplo: $3{,}6\overline{17} = 3{,}6171717\ldots$ → periodo “17” y ante-período “6“.

»Recordar que los dígitos decimales de acuerdo a su posición reciben los siguiente nombres:

$\underbrace{\textbf{UM}}_{\text{Unidad de Mil}}\ \underbrace{\textbf{C}}_{\text{Centena}}\ \underbrace{\textbf{D}}_{\text{Decena}}\ \underbrace{\textbf{U}}_{\text{Unidad}}\ ,\ \underbrace{\textbf{d}}_{\text{décima}}\ \underbrace{\textbf{c}}_{\text{centésima}}\ \underbrace{\textbf{m}}_{\text{milésima}}\ \underbrace{\textbf{dm}}_{\text{diez milésima}}$

Operatoria con decimales

i. Adición y sustracción

Para sumar o restar números decimales se ubican las cantidades enteras bajo las enteras, las comas bajo las comas, la parte decimal bajo la decimal y a continuación se realiza la operatoria respectiva.

Ejemplo:

▹ $0{,}247 + 21{,}65 =$

$$= \begin{array}{r} 0{,}247 \\ +21{,}65 \\ \hline 21{,}897 \end{array}$$

ii. Multiplicación

Para multiplicar dos o más números decimales, se multiplican como si fueran números enteros, y luego se ubica la coma en el resultado final, de manera tal que el resultado tenga la misma cantidad de cifras decimales que los números del ejercicio en conjunto.

Ejemplo:

▹ $1{,}24 \cdot 0{,}002 =$

$= \textit{Multiplicar } 124 \cdot 2$

$= 248$

Ubicar la coma manteniendo cinco cifras decimales:

$\rightarrow 0{,}00248$

iii. División

Para dividir números decimales, se puede transformar el dividendo y el divisor en números enteros amplificando por una potencia en base 10.

Ejemplo:

▹ $2{,}25 : 0{,}5 =$

Amplificado por 100.

$\rightarrow 225 : 50 = 4{,}5$

Transformaciones entre decimales y fracciones

i. De fracciones a decimales

Debemos dividir el numerador por el denominador.

Ejemplo:

▹ $\frac{1}{2} = 1:2 = 0{,}5$

ii. De decimales finitos a fracciones

En el numerador se escribe el número completo sin la coma. En el denominador un 1 acompañado de tantos ceros como dígitos existan en la parte decimal (después de la coma).

Ejemplo:

▹ $0{,}42 = \frac{42}{100}$

iii. De decimales periódicos a fracciones

En el numerador se escribe el número completo sin la coma y se le resta la parte no periódica. En el denominador tantos nueve como dígitos posea el período.

Ejemplos:

▹ $0{,}\overline{45} = \frac{45}{99}$

▹ $2{,}\overline{374} = \frac{2374 - 2}{999} = \frac{2372}{999}$

iv. De decimales semi–periódicos a fracciones

En el numerador se escribe el número completo sin la coma y se le resta la parte no periódica. Luego en el denominador, tantos nueve como dígitos posea el período, seguidos de tantos ceros como dígitos tenga el ante–período.

Ejemplos:

▹ $0{,}43\overline{21} = \frac{4321 - 43}{9900}$

▹ $32{,}4\overline{321} = \frac{324321 - 324}{9990}$

Múltiplos y divisibilidad

Se dice que un número a es **divisible** por otro b si al dividir a con b, el residuo o resto es cero, dicho de otra manera:

a es divisible por b sí y sólo sí $a = b \cdot c$ donde c es cociente.

En base a esto podemos decir que a contiene a b exactamente c veces. Llamaremos **múltiplo** de un número a un número que contiene a otro una cantidad exacta de veces, por ejemplo 12 es múltiplo de 2 porque 12 contiene a 2 seis veces exactamente. Los múltiplos de un número pueden obtenerse fácilmente multiplicando ese número por la serie infinita de los números naturales. Veamos un ejemplo con el conjunto de los múltiplos de 3.

Los múltiplos de 3 son:

$3 \times 1 = 3$	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 5 = 15$	$\vdots$
$3 \times 2 = 6$	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$3 \times n = 3n$

Si lo escribimos como conjunto por extensión:

$$M_3 = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \ldots,\ 3n\}$$

Los múltiplos de un número n se obtienen multiplicando n por cada número natural.

Números primos

Dentro de los números naturales más interesantes están los **números primos**, los que se caracterizan por ser divisibles por 1 y por sí mismos. Algunos ejemplos de números primos son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 37, 97

Otra característica muy potente de los números primos es que con ellos podemos generar cualquier otro número natural mediante la multiplicación de ellos. Esta característica la abordaremos más adelante.

Números compuestos

Cualquier número natural que pueda escribirse como multiplicación de 2 o más números naturales distintos de 1 y sí mimo, se denomina **número compuesto**. Por ejemplo el número 12 lo podemos descomponer así:

$$\begin{aligned} 12 &= 3 \cdot 4 \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Si descomponemos el número 18 en sus factores primos obtenemos:

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Notar que los términos que componen a un número compuesto coincide con sus ***divisores****.*

Pares e impares

Podemos separar el conjuntos de los enteros $\mathbb{Z}$ en dos subconjuntos: pares e impares. Llamamos **par** a todo número que es múltiplo de 2, es decir, si un número lo podemos escribir como

$$P = 2n$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, entonces P es par independiente de que n lo sea. Entonces si dividimos un número por 2 y el residuo o resto es 0, ese número es par.

Los **impares** son números que al dividir por 2 obtenemos 1 como residuo o resto. Dicho de otra manera, podemos construir cualquier impar como un par más o menos uno.

$$I = 2n \pm 1$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. En estas condiciones I es impar independientemente si n lo es.

Descomposición prima

Uno de los grandes logros de la Teoría de los Números es haber llegado a la conclusión de que **todo número compuesto puede escribirse como multiplicación de números primos**. A la acción de escribir un número compuesto como multiplicación de sus divisores primos se le denomina **descomposición prima**. Por ejemplo, si queremos descomponer el número 120, vamos escribiéndolo como multiplicación de otros números, hasta llegar sólo a números primos:

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \cdot 60 \\ &= 2 \cdot 6 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

mcm y MCD

TEOREMA FUNDAMENTAL

Todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de números primos.

* **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m)**
  Es el menor entero positivo que es múltiplo común de dos o más enteros.

* **MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)**
  Es el mayor entero positivo que es divisor común de dos o más enteros.

* **CÁLCULO DEL m.c.m y M.C.D MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS**
  Se descomponen los números dados en factores primos:
  1. El **m.c.m** se obtiene como producto de todos los factores primos, en el caso de existir factores primos comunes se considera aquel que posea el exponente mayor.
  2. El **M.C.D** se obtiene como producto de los factores primos comunes considerando aquel que posea el exponente menor.

Raíces

a. Definiciones

- Si **n es un número entero par positivo** y **a es un número real positivo o cero**, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a\ ,\ b \in \mathbb{R}_0^+$$

- Si **n es un número entero impar positivo** y **a es un número real cualquiera**, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a\ ,\ b \in \mathbb{R}$$

- La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a número real positivo o cero**, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[n]{a^k} = (a)^{\frac{k}{n}}$$

- Si **a es un numero real cualquiera**, entonces se cumple: $\sqrt{(a)^2} = |a|$

Nota:

La **enésima potencia par** de la **raíz enésima par** de un número es igual al mismo número, siempre y **cuando el número sea positivo.**

Ejemplo: $\sqrt[2]{7^2} = \sqrt[\cancel{2}]{7^{\cancel{2}}} = 7$

La **enésima potencia impar** de la **raíz enésima impar** de un número es igual al mismo número.

Ejemplos: $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7 \quad ; \quad \sqrt[5]{6^5} = 6$

b. Propiedades de las raíces

Considere que a, b, k, m, n son números reales distintos de cero

i. **Multiplicación de raíces de igual índice**.

Se conserva el índice de la raíz y se multiplican las cantidades sub-radicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo: $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

ii. **División de raíces de igual índice**.

Se conserva el índice de la raíz y se dividen las cantidades sub-radicales.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

Ejemplo: $\sqrt{x^7} : \sqrt{x} = \sqrt{x^6}$

iii. **Raíz de una raíz.**

Se conserva la cantidad sub-radical y se multiplican los indices de las raíces.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3 \cdot 4]{7}$

iv. **Raíz de una potencia**

La raíz de una potencia es igual a la raíz de la base elevada al exponente.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ejemplo: $\sqrt[5]{x^3} = (\sqrt[5]{x})^3$

v. **Factor de una raíz como factor sub-radical**

Se conserva el índice de la raíz y el factor multiplica a la cantidad sub-radical elevado al índice de la raíz.

$$a \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^m}$$

Ejemplo: $x \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3 y}$

vi. **Amplificación y simplificación de una raíz**

Un raíz se puede transformar a otra equivalente amplificando o simplificando el índice y el exponente por un número natural k.

$$\sqrt[n]{(a)^m} = \sqrt[n \cdot k]{(a)^{m \cdot k}}$$

Ejemplo: $\sqrt[5]{x^3} .= \sqrt[5 \cdot 2]{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt[10]{x^6}$

Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz. Habitualmente se puede dar alguno de los siguientes tres casos

Caso 1:

Fracciones de la forma: $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

$\Longrightarrow$ se amplifica por: $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$

Ejemplo: $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \quad \therefore \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

Caso 2:

Fracciones de la forma:

$$\frac{a}{p\sqrt{b}+q\sqrt{c}} \text{ o } \frac{a}{p\sqrt{b}-q\sqrt{c}}$$

$\Longrightarrow$ se amplifica por: $\frac{p\sqrt{b}-q\sqrt{c}}{p\sqrt{b}-q\sqrt{c}}$ o $\frac{p\sqrt{b}+q\sqrt{c}}{p\sqrt{b}+q\sqrt{c}}$

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt[\cancel{2}]{7}\right)^{\cancel{2}} - \left(\sqrt[\cancel{2}]{5}\right)^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5} \quad \therefore \frac{3\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}$$

Caso 3:

Fracciones de la forma: $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}}$

$\Longrightarrow$ se amplifica por: $\frac{\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^{n-p}}}$

Ejemplo: $\frac{7}{6\sqrt[8]{3^5}}$

$$\Rightarrow \frac{7}{6\sqrt[8]{3^5}} \cdot \frac{\sqrt[8]{3^3}}{\sqrt[8]{3^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{7\sqrt[8]{3^3}}{6\sqrt[\cancel{8}]{3^{\cancel{8}}}} = \frac{7\sqrt[8]{3^3}}{6 \cdot 3} \quad \therefore \frac{7\sqrt[8]{3^3}}{18}$$

Relación de orden de las raíces

Sean a y b números reales mayores o iguales a cero y n , m números naturales mayores que 1. Para ordenar raíces podemos utilizar alguno de los siguientes métodos, según sea el caso.

i. Caso 1. Iguales índices

Para ordenar raíces de igual índice y cantidades sub-radicales positivas, basta comparar las cantidades sub-radicales. Si se cumple que $a < b$, entonces $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Ejemplo: Comparar, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$. Dado que tienen igual índice, se cumple que $\sqrt{3} < \sqrt{4}$.

ii. Caso 2: Iguales cantidades sub-radicales

Para ordenar raíces de igual cantidad sub-radicales, basta comparar los índices de las raíces.

- Si, $a > 1$ y $n < m$, entonces $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$.

  Ejemplo: Comparar, $\sqrt[2]{16}$ y $\sqrt[4]{16}$. Dado que tienen igual cantidad sub-radical mayor que 1, se cumple que a mayor índice, menor es el valor de la raíz, por lo tanto $\sqrt[2]{16} > \sqrt[4]{16}$.

- Si, $0 < a < 1$ y $n < m$, entonces $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$.

  Ejemplo: Comparar $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ y $\sqrt[2]{\frac{1}{16}}$. Dado que tienen igual cantidad sub-radical menor que 1, se cumple que a mayor índice mayor es el valor de la raíz, por lo tanto $\sqrt[2]{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

iii. Caso 3: Distintos índices y distintas cantidades sub-radicales

En caso que las raíces tengan distinto índice y distinta cantidad sub-radical, es posible elevar las raíces al m.c.m de sus índices.

Ejemplo: Comparar $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{10}$. Elevamos ambas raíces a 6 (6 es el m.c.m entre 2 y 3). Esto es: $(\sqrt{5})^6 = 5^{\frac{6}{2}} = 5^3 = 125$ y $(\sqrt[3]{10})^6 = 10^{\frac{6}{3}} = 10^2 = 100$. Como $125 > 100$, entonces $\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$.

c. Suma de raíces

Para sumar raíces, éstas deben tener igual índice e igual cantidad sub–radical.

Ejemplos:

- $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$ → sumamos (3 + 8) y agregamos la $\sqrt{5}$.
- $\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ → sumamos (1 + 7) y agregamos la $\sqrt{2}$.

En caso de no tener igual cantidad sub–radical, se debe intentar igualarlas, aplicando propiedades ($\sqrt[n]{a^n \cdot b^m} = a \cdot \sqrt[n]{b^m}$) y luego se puede sumar.

Ejemplos:

- $\sqrt{50} + \sqrt{18} =$ $\begin{cases} \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$

  $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

- $\sqrt{5} + \sqrt{27} - \sqrt{20} + \sqrt{48} =$ $\begin{cases} \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \end{cases}$

  $\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} = -\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$

Potencias

POTENCIAS EN LOS REALES

Sea, $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define una potencia como la multiplicación n veces de un número a, por sí mismo. La potencia se escribe $a^n = b$, donde a es la base, n es el exponente y b el resultado.

En las potencias se cumple:

- » $a^0 = 1$, si $a \neq 0$
- » $0^n = 0$, si $n > 0$
- » $n^1 = n$
- » 0^0 , no está determinado.

Ejemplo:

En la potencia 3^5, la base es 3 y el exponente es 5. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

a. Signo de una potencia

Exponente par

El signo de una potencia de exponente par es siempre positivo, a menos que la base sea cero.

Ejemplo:

- ▹ $(-9)^2 = -9 \cdot -9 = 81$
- ▹ $(7-4)^2 = (4-7)^2 = 9$

Nota: $(-9)^2 \neq -9^2$

Exponente impar

El signo de una potencia de exponente impar es igual al signo de numero de la base, ya sea utilicemos o no paréntesis.

Ejemplo:

- ▹ $(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$
- ▹ $(7-4)^3 = -(4-7)^3 = -(-27) = 27$

Nota: $(-9)^3 = -9^3$

b. Propiedades de las potencias

Considere que a, b, m, n son números reales distintos de cero

i. **Multiplicación de potencias de igual base.**

Se conserva la base y se suman los exponentes. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Ej: $8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5$

ii. **División de potencias de igual base.**

Se conserva la base y restan los exponentes. $a^n \div a^m = a^{n-m}$ Ej: $12^7 \div 12^3 = 12^{7-3} = 12^4$

iii. **Potencia de una potencia.**

Se conserva la base y se multiplican los exponentes. $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$ Ej: $(7^2)^3 = (7^3)^2 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

iv. **Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente.**

Se multiplican las bases y se mantiene el exponente. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Ej: $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$

v. **División de potencias de distinta base e igual exponente.**

Se dividen las bases y se mantiene el exponente. $(a : b)^n = a^n : b^n$ Ej: $(5 : 2)^6 = 5^6 : 2^6$

vi. **Potencias de exponente negativo.**

Se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente. (La base debe ser distinta de cero)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Ej: $2^{-8} = \frac{1}{2^8}$

vii. **Fracciones con exponente negativo.**

Se invierte numerador y denominador y se cambia el signo del exponente. (El numerador y denominador deben ser distintos de cero)

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ Ej: $\left(\frac{7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^3$

viii. **Suma y resta de ponencias.**

Si bien no existen propiedades para la suma y resta de potencias, es posible aplicar la factorización para reducirlas.

Ej: $7^{12} + 7^{14} = 7^{12} \cdot (1 + 7^2) = 7^{12} \cdot (1 + 49) = 7^{12} \cdot 50$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica se utiliza habitualmente para operar con números que tienen una gran cantidad de dígitos.

Un número está escrito en notación científica si se escribe de la forma $a \cdot 10^n$, con $1 \leq a < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos:

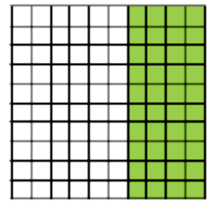
- $720.000.000 = 7{,}2 \cdot 10^8$
- $-0{,}000000005 = -5 \cdot 10^{-9}$

TIPS:

» En notación científica se cumple que para números mayores a 1, el exponente "n" es positivo, y para números positivos menores a 1, el exponente "n" es negativo.

Porcentajes

El porcentaje se refiere al número de partes, de un total de 100, que cumplen con cierta característica. Los porcentajes tienen distintas formas de representación:

Porcentaje	Fracción	Decimal	Gráficamente
40 %	$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	0,4	

Existen **estrategias de cálculo mental para calcular porcentajes** de manera más sencilla utilizando la división, como se muestra en la siguiente tabla:

Porcentaje	50 %	25 %	20 %	10 %	5 %	4 %	2 %	1 %
División por	2	4	5	10	20	25	50	100

Para calcular porcentajes, puedes utilizar diversas estrategias:

Estrategia 1: Divide la cantidad por 100. Luego, multiplica el cociente anterior por el porcentaje solicitado. Por ejemplo:

Calcula el 23 % de 450 $\Rightarrow$ $450 : 100 = 4{,}5$

$4{,}5 \cdot 23 = 103{,}5$

Estrategia 2: Multiplica el número por el porcentaje solicitado y luego divide por 100. Por ejemplo:

Calcula el 15 % de 300 $\Rightarrow \frac{300 \cdot 15}{100} = \frac{4500}{100} = 45$

Estrategia 3: Multiplica el número por el decimal equivalente al porcentaje solicitado. Por ejemplo:

Calcula el 36 % de 2400 $\Rightarrow 2400 \cdot 0{,}36 = 864$

Estrategia 4: Utiliza la proporcionalidad. Por ejemplo:

Calcula el 20 % de 40.

Cantidad	Porcentaje (%)
a	20
40	100

$$\frac{a}{40} = \frac{20}{100} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot 40}{100} = \frac{800}{100} = 8$$

- El a % de **descuento** en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 - a)$ % del precio del producto.
- Un **aumento** del b % en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 + b)$ % del precio del producto.

Dado un número y una cantidad total, es posible determinar a qué porcentaje corresponde uno del otro; por ejemplo:

Si se tiene un grupo de 15 personas de las cuales 6 son mujeres, ¿qué porcentaje del grupo son mujeres?

$$\frac{6}{15} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 6}{15} = \frac{600}{15} = \frac{120}{3} = 40$$

El 40 % de las personas son mujeres.

Además, es posible calcular el 100 % dado un número y su porcentaje de la siguiente manera:

Si 9 personas de un grupo, es decir el 60 %, son hombres, ¿cuántas personas componen dicho grupo?

$$\frac{9}{x} = \frac{60}{100} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 100}{60} = \frac{900}{60} = \frac{30}{2} = 15$$

El grupo está formado por 15 personas.

Intereses

INTERÉS SIMPLE

Una cantidad C crece a una tasa del i % por unidad de tiempo en un período de n unidades, en un régimen de crecimiento simple, si el crecimiento en cada unidad de tiempo es fijo.
La cantidad final C_F después de cumplido el período n está dada por:

$$\boxed{C_F = C + \frac{ni}{100} \cdot C}$$

$$\boxed{\text{Ganancia} = \frac{n \cdot i \cdot C}{100}}$$

INTERÉS COMPUESTO

Una cantidad C crece a una tasa del i% por unidad de tiempo en un período de n unidades, en un régimen de crecimiento compuesto, si el crecimiento en cada unidad de tiempo se agrega a C de modo que al final de cada unidad hay una nueva cantidad.
La fórmula para calcular la cantidad final C_F después de cumplido el período n es:

$$\boxed{C_F = C \cdot \left[1 + \frac{i}{100}\right]^n}$$

$$\boxed{\text{Ganancia} = C_F - C}$$

Logaritmos

Un logaritmo corresponde al exponente de una potencia: Si $\log_n a = c$, entonces $n^c = a$. Donde **n** es la base, **a** es el argumento y **c** es logaritmo. Se lee "el logaritmo de a en base n es c". Además debe cumplirse que a y n , sean números reales positivos, con n distinto de 1.

Ejemplo, si $\log_3 81 = 4$, entonces $3^4 = 81$.

Notas:

- Si la base es 10 se acostumbra no escribir.
- Los valores que puede tomar c son todos los números reales.
- Si la base es el número e (e = 2,7128 ...), entonces se denomina logaritmo natural y se denota por "ln". Ejemplo: $\log_e x = \ln x$
- El logaritmo es la operación inversa de la exponenciación.

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

b: base de logaritmo $b > 0 \; b \neq 1$
a: argumento $a > 0$
c: logaritmo $c \in \mathbb{R}$

Notación: $\log(a) = \log_{10}(a)$

Propiedades de los logaritmos

Sean: a, b, n, m $\in \mathbb{R}^+$, con n, m ≠ 1, se cumple.

i. **Logaritmo de 1**
El logaritmo de 1 es cero. $\log_n 1 = 0$ Ej: $\log_7 1 = 0$

ii. **Logaritmo de la base**
El logaritmo de la base es igual a uno. $\log_n n = 1$ Ej: $\log_{23} 23 = 1$

iii. **Logaritmo de una potencia**
El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente multiplicado por el logaritmo. $\log_n a^b = b \cdot \log_n a$ Ej: $\log_3 4^5 = 5 \cdot \log_3 4$

iv. **Logaritmo de un producto**
El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. $\log_n (a \cdot b) = \log_n a + \log_n b$ Ej: $\log_3 (2 \cdot 7) = \log_3 2 + \log_3 7$

v. **Logaritmo de una división**
El logaritmo de una división es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador. $\log_n \left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$ Ej: $\log_6 \left(\frac{3}{4}\right) = \log_6 3 - \log_6 4$

vi. **Cambio de base**

El logaritmo en base n de a, puede escribirse como la división de dos logaritmos de igual base.

$$\log_n a = \frac{\log_m a}{\log_m n}$$

Ej: $\log_5 7 = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}$

vii. **Cambio de signo**

El logaritmo en base n de a, es igual al inverso aditivo del logaritmo cuya base es el reciproco de n, de a, o es igual al inverso aditivo del logaritmo en base n del reciproco de a.

$$\log_n a = -\log_{\left(\frac{1}{n}\right)} a$$

ó

$$\log_n a = -\log_n\left(\frac{1}{a}\right)$$

Ej: $\log_2 8 = -\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 8 = 3$

Ej: $\log_4 16 = -\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = 2$

b. Relación de orden de logaritmos

Sean los argumentos, **a, b** números reales positivos y las bases **n, m** números reales positivos distintos de 1. Para ordenar logaritmos podemos utilizar alguno de los siguientes métodos, según sea el caso.

i. Caso 1. Iguales argumentos

Para ordenar logaritmos de iguales argumentos y bases mayores que 1, basta comparar las bases.

- Si se cumple que $\mathbf{n < m}$, entonces $\mathbf{\log_m a < \log_n a}$.

  Ejemplo: Comparar $\log_3 81$ y $\log_9 81$.

  Dado que tienen igual argumento, se cumple que $\log_3 81 > \log_9 81$.

ii. Caso 2: Iguales bases

Para ordenar logaritmos de igual base, basta comparar los argumentos.

- Si, $\mathbf{n > 1}$ y $\mathbf{a < b}$, entonces $\mathbf{\log_n a < \log_n b}$.

  Ejemplo: Comparar, $\log_2 8$ y $\log_2 16$.

  Dado que tienen igual cantidad sub-radical mayor que 1, se cumple que a mayor argumento, mayor es el valor del logaritmo, por lo tanto $\log_2 8 < \log_2 16$.

- Si, $\mathbf{0 < n < 1}$ y $\mathbf{a < b}$, entonces $\mathbf{\log_n a > \log_n b}$.

  Ejemplo: Comparar, $\log_{\frac{1}{2}} 8$ y $\log_{\frac{1}{2}} 16$.

  Dado que tienen igual cantidad sub-radical menor a 1, se cumple que a mayor argumento, menor es el valor del logaritmo, por lo tanto $\log_{\frac{1}{2}} 8 > \log_{\frac{1}{2}} 16$

iii. Caso 3: Distintas bases y distintos argumentos

En caso que tanto los argumentos como las bases sean distintas, una posibilidad seria cambiar las expresiones hasta llegar a alguna con base común, aplicando propiedades.

Ejemplo: Comparar $\log_4 3$ y $\log_8 5$.

Aplicando la propiedad de cambio de base, podemos reescribir convenientemente ambas expresiones como división de logaritmos de base 2.

$$\log_4 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\log_2 3 = \log_2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \log_8 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 8} = \frac{\log_2 5}{3} = \frac{1}{3}\cdot\log_2 5 = \log_2\sqrt[3]{5}$$

Para comparar los argumentos debemos elevar ambas raíces a 6 (6 es el m.c.m entre 2 y 3).

Esto es: $(\sqrt{3})^6 = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$ y $(\sqrt[3]{5})^6 = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$. Como $27 > 25$, entonces $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$ y por ende $\log_2\sqrt{3} > \log_2\sqrt[3]{5}$ y finalmente podemos concluir que $\log_4 3 > \log_8 5$.